



**HAL**  
open science

# OPTIMISATION DU COUSSINET DE BIELLE: CARACTERISATIONS, SIMULATIONS ET MISE EN FORME

Philippe Saffré

► **To cite this version:**

Philippe Saffré. OPTIMISATION DU COUSSINET DE BIELLE: CARACTERISATIONS, SIMULATIONS ET MISE EN FORME. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Savoie, 1997. Français. NNT: . tel-01907099

**HAL Id: tel-01907099**

**<https://univ-smb.hal.science/tel-01907099v1>**

Submitted on 28 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.









**UNIVERSITE DE SAVOIE  
E.S.I.G.E.C.**

*Année 1997*

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE SAVOIE**

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

**Discipline : MECANIQUE et MATERIAUX**

présentée et soutenue publiquement par

**Philippe SAFFRÉ**

le 19 décembre 1997

**Titre :**

---

**OPTIMISATION DU COUSSINET DE BIELLE :  
CARACTERISATIONS, SIMULATIONS ET MISE EN FORME**

---

*Directeurs de thèse : J. Pastor, J.L. Ligier*

---

Composition du jury

Président      AURIAULT J.L.

Rapporteurs : BOIVIN M.  
                  TERRIEZ J.M.

Examineurs :      BARIOD P.  
                          LIGIER J.L.  
                          LOUTE E.  
                          MAEDER G.  
                          PASTOR J.







## AVANT-PROPOS

*Cette thèse a été réalisée au sein du LaMaCo de l'E.S.I.G.E.C. à l'Université de Savoie, en partenariat avec l'entreprise Glacier-Vanderwell, fabricante de coussinets de bielle, et financée par la Région Rhône-Alpes.*

*L'aboutissement de ce mémoire est le fruit d'échanges, de conseils et de soutiens de la part d'un grand nombre de personnes auxquelles je tiens, ici, à adresser ma plus profonde reconnaissance :*

*tout d'abord à Monsieur Joseph Pastor, Professeur à l'Université de Savoie, et Monsieur Jean-Louis Ligier, Docteur et Ingénieur à la Direction de la Stratégie et des Avants-Projets de Renault, tous deux encadreurs de cette thèse, pour m'avoir conseillé et guidé avec toute la compétence qui les caractérise, scientifique, technique ou industrielle, et pour l'attention qu'ils ont accordée au bon déroulement de cette étude ;*

*à Monsieur Philippe Bariod, Ingénieur, qui a été mon interlocuteur privilégié à Glacier-Vanderwell, pour sa participation au jury et pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues dans le cadre de cette collaboration. Que Olivier Beaurepaire et Manuel Lagache soient également remerciés pour s'être impliqués dans ce travail ;*

*à Messieurs les Professeurs Maurice Boivin, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'INSA, et Jean-Michel Terriez, Directeur de l'U.F.R. de Mécanique de l'Université Joseph Fourier à Grenoble, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à cette étude en acceptant d'en être les rapporteurs en dépit de leur charges respectives, ainsi qu'à Monsieur le Professeur Jean-Louis Auriault, Professeur de Mécanique à l'Université Joseph Fourier, qui m'a fait l'honneur de présider le jury ;*

*A Monsieur Etienne Loute, Professeur à l'Université Catholique de Louvain-la-Neuve, et Monsieur Gérard Maeder, Directeur du Service Ingénierie des Matériaux de Renault, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter de participer à mon jury.*

*Toute ma gratitude va également à Monsieur Jean-Louis Faure, Président de Composi'tec, pour le matériel performant qu'il a bien voulu mettre à ma disposition.*

*Je tiens à remercier aussi tous les membres du LaMaCo pour les échanges fructueux, les nombreuses heures de calcul et leur amitié partagées, entre autre notre dévouée secrétaire Françoise Seguin, mais aussi Christophe Disdier, Thài The-Hung, Hongxue Cai, Pierre Teppaz, Mourad Arous, ...*

*Enfin, je remercierais en dernier, mais ce n'est pas forcément la place qui leur est due, ma famille et mes amis qui m'ont soutenu activement durant ces années de travail. Je pense plus particulièrement à Marilyn, qui a sans doute vécu cette thèse presque autant que moi, et dont le mérite ne peut être exprimé par de simples lignes de remerciements.*

# Table des matières

<i>Introduction générale</i>	11
<i>I Caractérisation des matériaux antifriction</i>	15
<b>1.1 Introduction</b>	15
<b>1.2 Les matériaux de coussinets</b>	19
<b>1.3 Les différents modèles d'homogénéisation</b>	20
1.3.1 Domaine concerné	21
1.3.2 Méthode	22
1.3.3 Modèles utilisés dans le cadre de l'étude	23
1.3.4 Modèle autocohérent de Budiansky	24
1.3.5 Bornes de Hashin et Shtrikman	26
1.3.6 Modèle autocohérent à trois phases	27
1.3.7 Modèle autocohérent à $n + 1$ phases de Hervé-Zaoui	29
1.3.8 Modèle autocohérent à $n + 1$ phases appliqué à la détermination de la dilatation thermique	30
1.3.9 Modèle autocohérent à $n + 1$ phases appliqué à la détermination de la conductibilité thermique	35
1.3.10 Modèle autocohérent à quatre phases appliqué aux composites biphasiques	39
1.3.11 Applications originales du modèle à quatre phases*	42
<b>1.4 Le matériau étudié</b>	45
1.4.1 Les composants	45
1.4.2 Les caractéristiques des composants	47
<b>1.5 Caractérisations mécanique, thermomécanique et thermique</b>	49
1.5.1 Caractérisation mécanique	49
1.5.2 Caractérisation thermique	51
1.5.3 Les prévisions des modèles	54

<b>1.6 Confrontation des résultats expérimentaux et théoriques</b>	<b>59</b>
1.6.1 Confrontations des résultats mécaniques	59
1.6.2 Confrontations des résultats thermomécaniques et thermiques	62
<b>1.7 Bilan et conclusion</b>	<b>64</b>
<b><i>II Etude du coussinet dans son berceau</i></b>	<b>67</b>
<b>2.1 Introduction</b>	<b>67</b>
<b>2.2 Contact et frottement</b>	<b>68</b>
<b>2.3 Contact unilatéral</b>	<b>69</b>
2.3.1 Problème de Signorini	69
2.3.2 Lois de frottement	71
2.3.3 Equations du problème de contact avec frottement	72
<b>2.4 Approche élastique-plastique du contact</b>	<b>75</b>
<b>2.5 Méthode de contact adhérent avec pénalisation</b>	<b>79</b>
<b>2.6 Résolutions numériques du problème</b>	<b>80</b>
2.6.1 Introduction	80
2.6.2 MINOS	81
2.6.3 SYSTUS+	82
<b>2.7 Simulation de la mise en compression du coussinet</b>	<b>83</b>
2.7.1 Présentation du problème	83
2.7.2 Cas du glissement pur	84
2.7.3 Cas du frottement de Tresca	87
2.7.4 Cas du frottement de Coulomb	89
<b>2.8 Approche expérimentale du frottement</b>	<b>91</b>
2.8.1 Présentation de l'essai	91
2.8.2 Approche analytique type RDM	93
2.8.3 Exploitation des résultats	98
<b>2.9 Mesure des contraintes à l'interface</b>	<b>105</b>
2.9.1 Principe	105
2.9.2 Matériel d'essai	106
<b>2.10 Conclusion</b>	<b>108</b>



<b>III Mise en forme élastoplastique du coussinet</b>	<b>111</b>
<b>3.1 Introduction</b>	<b>111</b>
<b>3.2 Présentation des méthodes utilisées sous Systus+</b>	<b>113</b>
3.2.1 Analyse statique non linéaire : généralités	113
3.2.2 Elastoplasticité	113
3.2.3 Grands déplacements et grandes rotations	122
3.2.4 Contact avec frottement	125
3.2.4 Résolution de systèmes non linéaires	126
<b>3.3 Modélisation du cambrage</b>	<b>129</b>
3.3.1 Etude MEF en grandes déformations :	129
3.3.2 Comparaison MEF - approche « RDM » :	138
<b>3.4 Modélisation de la conformation</b>	<b>143</b>
<b>3.5 Vérifications expérimentales et leur exploitation</b>	<b>149</b>
3.5.1 Contrôle de l'ouverture libre et de la hauteur du coussinet	149
3.5.2 Contrôle du quadrillage du dos du coussinet	150
<b>3.6 Conclusion</b>	<b>153</b>
 <i>Conclusion générale</i>	 <b>155</b>
 <i>Bibliographie</i>	 <b>158</b>
 <b>Annexe A Constantes des modèles d'homogénéisation</b>	 <b>163</b>
<b>A.1 Modèle autocohérent à trois phases</b>	<b>163</b>
<b>A.2 Modèle autocohérent à <math>n + 1</math> phases de Hervé-Zaoui</b>	<b>164</b>
 <b>Annexe B Formulation en Lagrangien actualisé en grandes déformations</b>	 <b>167</b>
<b>B.1 Cinématique du milieu continu</b>	<b>167</b>
B.1.1 Evolution de la configuration	167
B.1.2 Déplacements	168
B.1.3 Tenseurs gradient de la transformation	169
B.1.4 Vitesses	169

---

B.1.5 Tenseurs gradient de vitesse	170
<b>B.2 Définition du tenseur vitesse de déformation</b>	<b>171</b>
<b>B.3 Remarques diverses</b>	<b>172</b>
<i>Annexe C Courbes de traction des matériaux</i>	<i>175</i>

# Introduction générale

Cette étude sur les coussinets de bielle a été financée par la société Glacier Vandervell en partenariat avec la région Rhône Alpes.

Bien que mal connus, les coussinets de bielle sont présents dans tous les moteurs thermiques à combustion interne de véhicules automobiles. Ces pièces, comme leur nom l'indique, peuvent équiper les paliers de bielle comme le montre la figure 1 qui représente une portion de vue éclatée de moteur thermique.

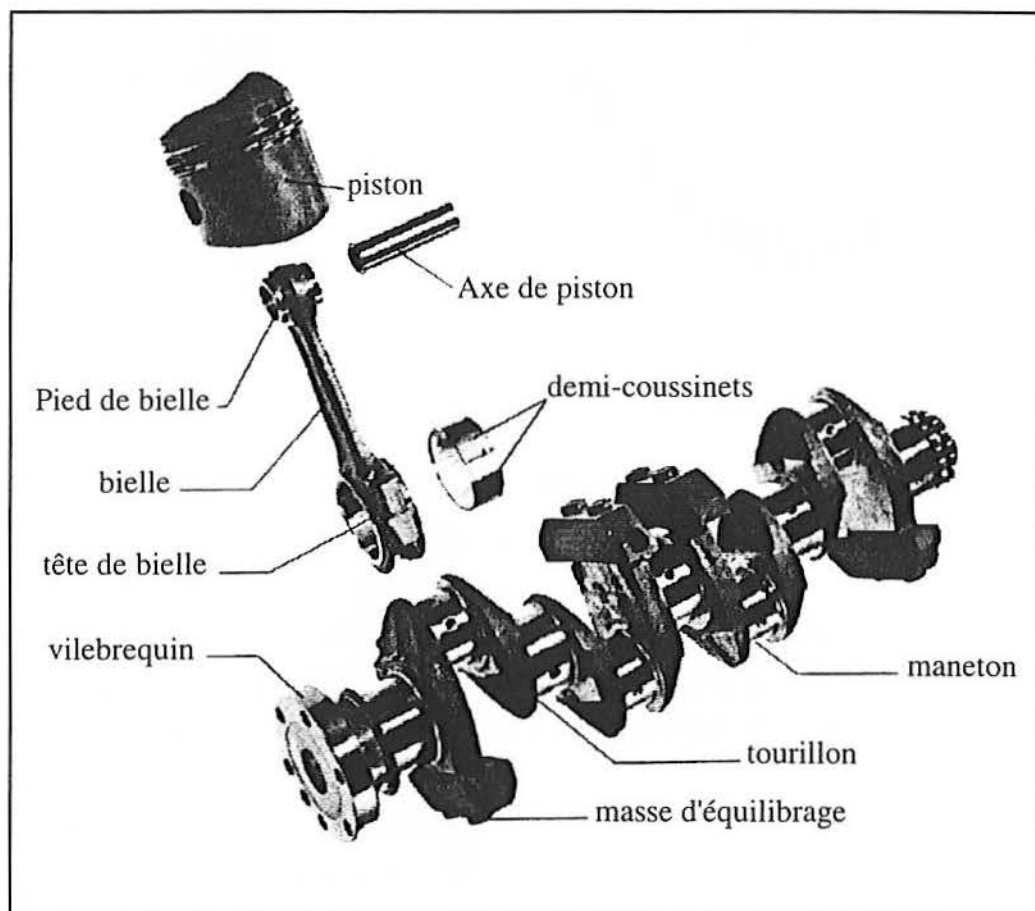


Figure 1 : Vue éclatée d'un moteur

A ce titre, il est utile de rappeler que la bielle est une pièce essentielle dans la transformation du mouvement rectiligne alternatif d'un piston en un mouvement de rotation du vilebrequin. Outre la génération d'un couple sur le vilebrequin dû à l'effort qu'elle applique sur ce dernier, la bielle doit aussi garantir le bon fonctionnement de ses articulations avec le piston et avec le vilebrequin vis-à-vis des aléas inhérents à tout système mécanique lubrifié. Pour assurer cette dernière fonction, on utilise précisément des coussinets.

Le coussinet se présente sous la forme de deux demi coquilles se faisant face. Le matériau constitutif est en fait de type bicouche ou tricouche selon les revêtements anti-friction retenus. Le type de coussinet ayant servi à cette étude possède un revêtement en alliage d'aluminium-étain plaqué par colaminage à froid sur un feuillard d'acier.

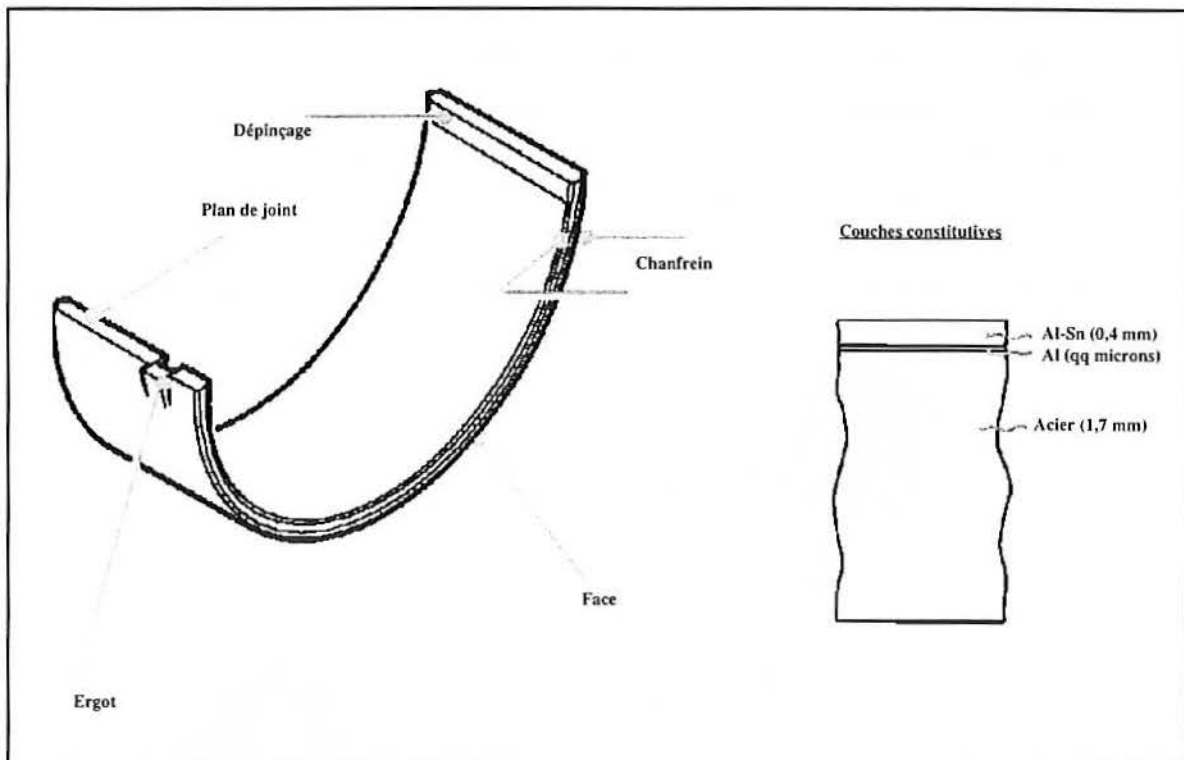


Figure 2 : Le coussinet

Le but de notre étude a été de caractériser les matériaux biphasiques de type aluminium-étain et de simuler la mise en forme et le contrôle de la longueur circonférentielle de ceux-ci. En effet, les principales questions que se pose l'industriel concernent les points suivants.

- La connaissance des caractéristiques thermomécaniques du matériau antifricton du coussinet. La difficulté réside ici dans le fait que le matériau est multiphasique et que les taux massiques des constituants peuvent varier suivant les applications.

- La connaissance des facteurs influents lors de l'opération de mise en forme du coussinet.
- La validité des contrôles de mesure de longueur, en particulier l'importance de l'erreur induite par le frottement du coussinet dans son logement de contrôle.

Ainsi, dans une première partie et compte tenu de l'aspect multiphasique du matériau, nous avons étudié les différentes techniques d'homogénéisation relatives à ce type de matériau. Pour répondre le plus fidèlement à la question posée nous avons adopté un modèle à quatre phases. Ce modèle a été ensuite validé par une confrontation avec des essais sur différentes familles d'éprouvettes, à différentes compositions et à différentes températures.

Fort de cette connaissance de propriétés thermomécaniques, nous avons abordé, dans une seconde partie, l'étude du frottement du coussinet dans son logement et plus particulièrement l'effet de ce phénomène sur l'opération de contrôle de longueur développée -circonférentielle- du coussinet. Une corrélation calcul / mesure a permis d'identifier les valeurs des coefficients de friction à considérer.

Connaissant les caractéristiques des matériaux et le coefficient de frottement coussinet / logement en acier nous avons pu, dans la dernière partie de cette thèse, étudier la mise en forme du coussinet lui-même. Une simulation numérique des différentes étapes de la mise en forme a été réalisée à l'aide du logiciel SYSTUS. Un modèle simplifié de type RDM a été employé pour confirmer les ordres de grandeur obtenus par le code. In fine, la comparaison calcul expérience s'avère tout à fait satisfaisante pour chacun des contrôles expérimentaux que nous avons réalisés.



# Chapitre 1

## Caractérisation des matériaux antifriction

### 1.1 Introduction

Le coussinet de bielle est un élément indispensable pour le bon fonctionnement d'un moteur puisqu'il corrige les imperfections pouvant survenir au niveau de la liaison entre la bielle et le vilebrequin. On peut ainsi transformer pour une durée quasi illimitée le mouvement de translation alternatif produit par les pistons à l'intérieur des cylindres en un mouvement de rotation exploité par la suite pour la propulsion du véhicule.

En pratique, les revêtements antifriction ont bien souvent une structure hétérogène due à la présence de différents constituants et phases. Ceux-ci apportent des propriétés mécaniques et physiques complémentaires, voire antagonistes les unes des autres, afin de répondre aux caractéristiques spécifiques requises par les problèmes de friction qui ne peuvent être satisfaites par un matériau unique monphasé.

Pour répondre à ce besoin de complémentarité des propriétés mécaniques, plusieurs types de structures sont utilisées actuellement. Parmi les structures à deux phases on trouve :

- des structures à matrice tendre dans laquelle résident des grains durs dits porteurs (métaux blancs ou régules) ;

- des structures à matrice dure au travers de laquelle un réseau réticulaire de phase fusible existe.

Dans une même famille de structure, il est difficile d'orienter son choix à partir de considération théorique vers un couple de constituants, car les mécanismes tribologiques mis en jeu sont complexes et pluridisciplinaires.

Les meilleures indications restent encore celles tirées de résultats d'essais obtenus dans des conditions similaires à celle de l'application à traiter. Cependant du fait de la grande variété d'utilisations possibles, il n'est pas toujours possible de respecter cette condition de similitude. C'est pourquoi, sur le plan mécanique, thermique, ou thermomécanique, il est très intéressant d'utiliser une modélisation aussi fine que possible. Celle-ci permettra de mieux prédire le comportement d'une structure matricielle donnée.

A ce titre la méthode d'homogénéisation paraît particulièrement bien adaptée à la prévision des caractéristiques élastiques et thermiques de ce type de matériaux. La technique d'homogénéisation appliquée à de telles structures permet en effet de définir finement les caractéristiques globales d'un matériau antifriction, que ce soit en termes de caractéristiques mécaniques, thermiques, ou thermomécaniques.

Les conséquences directes de la connaissance de telles caractéristiques sont multiples :

- Du point de vue mécanique, les propriétés mécaniques homogénéisées permettent une évaluation plus précise des contraintes de mise en forme des matériaux utilisés en couche mince, ainsi que des contraintes et déformations du matériau lorsque une sollicitation extérieure lui est appliquée (mise en fonctionnement du coussinet) ;

- Du point de vue thermique, la prédiction plus réaliste de la température dans le matériau apporte un élément essentiel dans la prédiction du comportement tribologique ;

- Du point de vue thermomécanique, l'estimation des contraintes internes générées par la friction d'un contact permet d'estimer la tendance de la phase fusible à s'extraire du matériau, ainsi que la résistance en fatigue du matériau influencé par ces contraintes d'origine thermique. En effet les calculs de tenue en fatigue pourront être effectués à une température plus réaliste compte tenu de l'amélioration apportée sur l'aspect thermique.

Le but des méthodes d'homogénéisation, autrement dit de l'approche du comportement effectif des milieux hétérogènes à une échelle microscopique est, in fine, de fournir une loi de comportement utilisable pour le calcul de structures macroscopiques.

La démarche suivie consiste à détailler la constitution de l'élément de volume ou du point matériel défini au sens de la mécanique des milieux continus. Le matériau apparaît alors comme un assemblage de différents domaines. Ces domaines sont définis de telle sorte que, d'une part, les outils de la mécanique des milieux continus puissent encore



être utilisés (ce qui exclut les échelles trop fines où l'on discerne les atomes), et que d'autre part, tous les points d'une même phase aient un comportement mécanique identique. Pour les matériaux métalliques, par exemple, les dimensions de ce domaine vont de quelques microns au centimètre. Cette échelle est donc caractéristique des hétérogénéités des matériaux.

Les modèles d'homogénéisation des matériaux composites et des métaux polyphasés sont nombreux.

Les différentes approches établissant ces modèles d'homogénéisation sont basées sur des méthodes bien particulières, où de nombreux paramètres géométriques, mécaniques et physiques peuvent intervenir.

Parmi ces approches, les modèles variationnels fournissent des encadrements des constantes en minimisant une fonctionnelle plus ou moins assimilée à l'énergie de déformation du composite. On s'efforce ainsi d'associer à une connaissance partielle de la microstructure du matériau hétérogène le domaine, délimité par des bornes que l'on vise à optimiser, des valeurs possibles pour ses caractéristiques effectives.

Ils ont été développés principalement par Voigt [1] et Reuss [2], Hashin et Shtrickman [3], et par Hashin [4], en élasticité, et connaissent leur équivalents traités par Hashin et Shtrickman [5], et Rosen et Hashin [6] pour certaines propriétés thermiques.

Comme les autres modèles à deux phases, ils supposent une adhésion parfaite entre les phases. De plus, ces solutions ne sont valables que pour d'assez faibles taux de charges ou d'inclusions, car elles ignorent les interactions dues à la présence des inclusions voisines.

Un autre type d'approche vise à établir une estimation du comportement global à partir d'hypothèses particulières sur la distribution spatiale des constituants. Parmi celles-ci, les modèles phénoménologiques décrivent le comportement élastique ou thermique des composites à partir de relations empiriques ou semi-empiriques, exprimant une sorte de *loi des mélanges*. Ils comportent des paramètres ajustables pour l'utilisateur de manière à faire coïncider au mieux les résultats théoriques avec les résultats expérimentaux.

Il peut s'agir également de traitements entièrement déterministes, comme pour les méthodes d'homogénéisation périodique, où l'on préjuge d'une structure périodique répétant une cellule de base complètement décrite ou, pour les méthodes de simulation numérique (notamment par éléments finis), de milieux hétérogènes donnés.

Enfin, il existe aussi des traitements probabilistes de milieux aléatoires satisfaisant une propriété donnée de distribution statistique, comme celle du *désordre parfait* pour le

modèle autocohérent présenté par Hershey [7], Kröner [8], Hill [9], ou Budiansky [10] en élasticité, et aussi Budiansky [11] et Hashin [12] pour les équivalents en thermique. Si des progrès significatifs ont déjà été réalisés dans ces directions, des efforts sont maintenant consacrés à la prise en compte de caractéristiques données de distributions spatiales des constituants des matériaux hétérogènes, permettant de resserrer l'encadrement des modules effectifs ou de traiter de distributions spatiales autres qu'extrêmes (*ordre complet* ou *désordre parfait*).

De tels modèles ont été développés par Mori et Tanaka [13], mais aussi Kerner [14], Van Der Pol [15], Christensen et Lo [16, 17], Maurer [18], Hervé et Zaoui [19] en élasticité, Kerner [20], Christensen [17], Maurer [18], Papazoglou et Col. [21] en thermique.

En ce qui concerne le domaine de la conductibilité thermique, il est utile de souligner la forte analogie entre les problèmes de propriétés élastiques effectives et de conductibilité effective. Chaque théorème dans un cas possède un équivalent dans l'autre. Les relations entre élasticité et conduction peuvent être ainsi présentées :

<u>Elasticité</u>	<u>Conduction</u>
$u_i$ = déplacement	$T$ = température
$\varepsilon_{ij}$ = déformation	$T_{,i}$ = gradient
$\sigma_{ij}$ = contrainte	$q_i$ = flux
$C_{ijkl}$ = coeff. de rigidité	$\lambda_{ij}$ = conductibilité
$S_{ijkl}$ = coeff. de souplesse	$\rho_{ij}$ = résistance

Les méthodes, modèles, et résultats en élasticité ont leurs équivalents en conduction. Les démarches mathématiques pour les problèmes de conductibilité sont simplifiées par rapport aux problèmes d'élasticité.

## 1.2 Les matériaux de coussinets

Avant d'aborder plus en détail les matériaux de coussinets, il est intéressant de présenter l'historique du développement des matériaux de frottement, et de rappeler ensuite les caractéristiques que ce type de matériaux doit posséder.

On estime que l'utilisation de paliers simples avec des métaux ou des alliages à faibles coefficients de frottement est concomitante au début de la révolution industrielle. C'est principalement le développement des machines à vapeur qui a entraîné l'emploi de paliers lisses pour les organes des moteurs et les arbres de transmission. Les matériaux utilisés à l'époque étaient la fonte grise, ou le bronze, connu pour ses propriétés lubrifiantes dès le début de l'antiquité, qui sous des températures faibles ne provoquent pas de micro-soudures dangereuses, et donc pas de grippage.

L'évolution des machines, et des charges supportées par les paliers de celles-ci, a conduit à développer des coussinets en bronze avec un dépôt épais en plomb dans l'alésage. Ce dépôt permettait une meilleure adaptation de l'arbre et une friction diminuée. Cependant les faibles performances mécaniques du plomb n'ont pas permis à ce matériau de se pérenniser. Suivant un concept proche, l'introduction d'un matériau fusible à basse température, Babbit déposait en 1835 un brevet sur la composition d'alliages anti-friction palliant les inconvénients du plomb. Ces alliages sont encore utilisés à l'heure actuelle avec des compositions voisines de celles prescrites alors.

Le plomb et l'étain sont restés les deux éléments principalement employés industriellement pendant tout le 19<sup>e</sup> siècle, voir le début du 20<sup>e</sup>. L'évolution continue des performances des moteurs, surtout celles requises par les engins de guerre, a « obligé » les matériaux à posséder de meilleures caractéristiques mécaniques. C'est ainsi que l'on a pu voir apparaître dans les années 20 les premiers coussinets avec des substrats en cu-plomb, mais aussi les premiers exemples de coussinets en aluminium-étain, puis dans les années 30 les coussinets à base de zinc et de cadmium.

Un historique détaillé a été réalisé par Dowson [22] ainsi que Cazaud [23].

Toutes les propriétés ou caractéristiques que l'on peut énumérer comme étant nécessaires aux coussinets sont en fait liées aux avaries qui surviennent sur ceux-ci. C'est donc principalement la capitalisation de l'expérience du concepteur de palier qui conditionne la préconisation de matériaux, celle-ci visant bien entendu à annihiler les avaries pouvant survenir sous différents environnements et conditions de fonctionnement. Certaines de ces propriétés peuvent être antagonistes et approchées par des méthodes d'homogénéisation.

A ce titre les propriétés nécessaires à un bon comportement en frottement sont :

- la résistance à l'usure, qui impose un métal dur ;
- un bas seuil de plasticité pour une faible résistance au cisaillement, qui correspond à un métal mou.

La solution générale de ce type de problème de frottement est, en principe, fournie par des alliages à deux constituants : l'un dur, l'autre mou. C'est ainsi que beaucoup d'alliages antifrictions sont constitués d'une phase dure continue d'aluminium ou de cuivre, de même que la phase tendre, peut être d'étain ou de plomb. On utilise donc des matériaux biphasés. Pour certaines applications tribologiques délicates, on emploie même des matériaux à trois ou quatre phases. L'appréciation des caractéristiques mécaniques conduit de façon naturelle à employer l'homogénéisation.

Outre l'influence évidente sur la résistance mécanique, l'aspect thermique est l'un des éléments fondamentaux dans les paliers. Une bonne conductibilité thermique favorise en effet le bon fonctionnement car la chaleur dégagée par le frottement est plus facilement évacuée. La tendance au grippage, en cas de contact métal sur métal, c'est-à-dire l'engagement du système frottant dans un processus thermique divergent, est ainsi diminuée. La conductibilité thermique reste la moins étudiée des principales propriétés de transport, et sa définition peut être donnée ainsi :

$$\lambda = \frac{q}{(dT/dx)} = \frac{q}{(\Delta T/x_0)} \quad (1.1)$$

où  $q$  est le flux de chaleur, et  $dT/dx$  est le gradient de température. On notera une analogie évidente dans la forme de l'équation définissant le module d'Young et de l'équation (1.1).

Pour les matériaux antifriction épais, le coefficient de dilatation conditionne le jeu en service pour une température donnée.

Afin de connaître plus en détail l'ensemble des propriétés des matériaux et bien les positionner dans leur domaine d'applications, on se reportera à la synthèse [24].

### 1.3 Les différents modèles d'homogénéisation

#### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Le présent chapitre vise à faire un bilan bibliographique sur la modélisation du comportement thermomécanique des matériaux hétérogènes aléatoires, notamment en ce qui concerne la prise en compte des caractéristiques morphologiques, ceci pour nous ame-

ner aux motivations et objectifs de la présente étude. Ne prétendant pas à l'exhaustivité, nous rapporterons les fondements des approches de type "milieu effectif", suivis d'indications sur les méthodes adaptées aux traitements de phénomènes critiques.

### 1.3.1 Domaine concerné

Conformément au point de vue adopté ici, lequel vise à modéliser le comportement de milieux aléatoires, nous excluons du champ de notre mise au point les méthodes d'homogénéisation périodique (voir par exemple P. Suquet [25] ou E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui [26]), ainsi que les traitements par méthode d'éléments finis de configurations particulières de matériaux biphasés (voir C. Thomas de Montpreville [27]).

Deux précisions supplémentaires doivent être encore apportées pour mieux cerner le champ de cette étude :

- l'hétérogénéité d'un matériau biphasé peut être caractérisée à des échelles différentes : d'un composé aluminium-étain comme celui représenté sur la figure (1.1), on peut retenir seulement l'existence de deux phases - l'aluminium et l'étain - et considérer chacune globalement. Mais à une échelle d'analyse plus fine, on peut prendre en compte l'hétérogénéité de chacune des phases : l'aluminium, comme l'étain, sont polycristallins et les grains eux-mêmes peuvent être considérés comme des éléments homogènes d'agrégats monophasés hétérogènes. A une échelle encore plus fine, chaque grain peut être considéré comme hétérogène et formé d'assemblage complexe de domaines, de sous-grains, voire de cellules de dislocations, etc. Renvoyant à d'autres études (comme M. Berveiller et A. Zaoui [28]) pour la prise en compte de différentes échelles d'hétérogénéité, nous nous contenterons dans la suite de considérer chaque phase comme globalement homogène, excluant toute analyse cristallographique ou de défauts structuraux. L'échelle choisie doit donc être suffisamment grande par rapport à la taille des hétérogénéités de façon qu'elle puisse être représentative de la microstructure, c'est à dire contenir toutes les informations géométriques nécessaires à sa description, mais aussi suffisamment grande par rapport à l'échelle de variation des variables mécaniques, thermiques, ou thermomécaniques ;

- bien que nos deux phases soient considérées comme globalement homogènes, nous supposerons les domaines de phases assez petits par rapport à l'élément de volume du matériau biphasé pour que ce dernier puisse être considéré comme macrohomogène : en ce sens, nous supposerons satisfaites les conditions de macrohomogénéité telles qu'elles sont définies par Hill [29] ou J. Mandel [30].



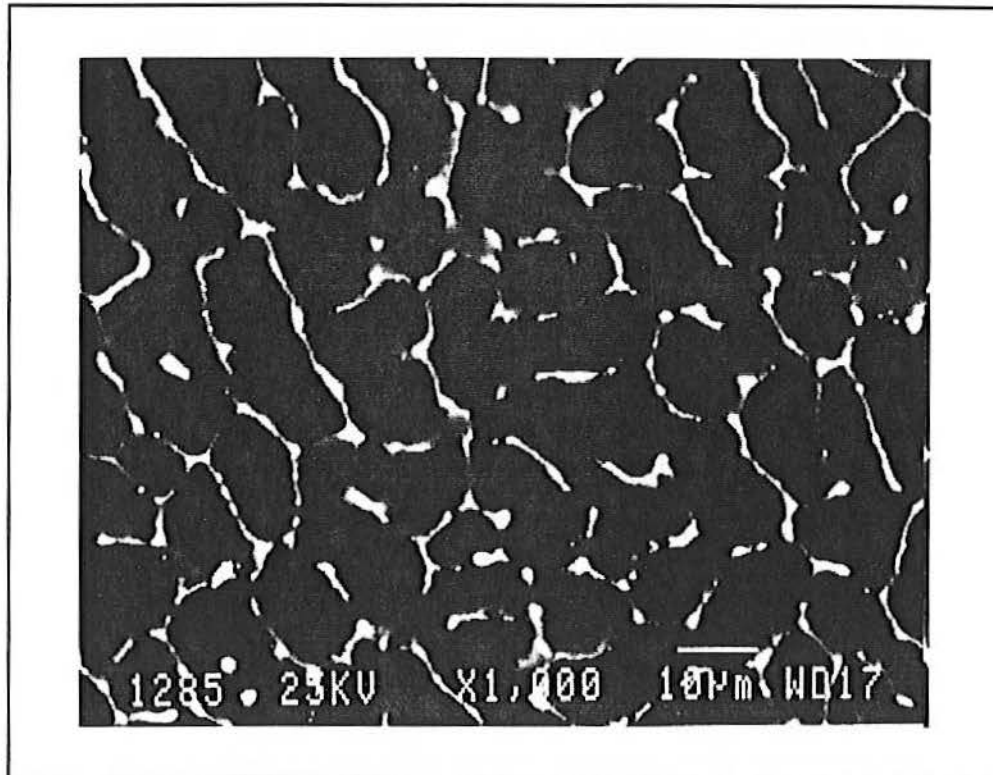


Figure (1.1) : Aspect d'un matériau hétérogène

La figure 1.1 représente une vue du microscope électronique à balayage, à grossissement \* 1000 d'un biphasé aluminium-étain à 6 % d'étain en masse, l'étain apparaît en clair, et montre une tendance filmogène marquée.

### 1.3.2 Méthode

Si l'on reste dans ce cadre d'analyse micromécanique, il s'agit, à partir d'un volume élémentaire représentatif (noté V.E.R.), contenant toutes les informations sur le matériau hétérogène, de déterminer un milieu homogène *équivalent* fictif (noté m.h.e.), qui, soumis aux mêmes sollicitations, a une réponse macroscopique identique.

Cette méthode comporte trois grandes étapes :

- tout d'abord, il faut préciser le contenu du volume élémentaire représentatif, c'est-à-dire les paramètres caractéristiques du matériau hétérogène qui seront pris en compte dans la détermination du comportement effectif : ce travail constitue l'étape de **représentation** ;
- puis on doit modéliser la réponse thermomécanique de ce volume soumis à des sollicitations à ces frontières, en d'autres termes relier les champs de déforma-

tions, de contraintes et de températures locaux aux champs de déformations, de contraintes et de températures macroscopiques : c'est l'étape de **localisation** ;  
- enfin, à partir des étapes précédentes, par des opérations de moyennes adaptées, on atteint l'objectif fixé, à savoir la détermination du comportement effectif : c'est l'étape d'**homogénéisation**.

### 1.3.3 Modèles utilisés dans le cadre de l'étude

Les modèles de prévision de comportement des matériaux hétérogènes utilisés au cours de notre étude ont été choisis car la signification géométrique de leur modélisation est bien fondée et explicitée en élasticité linéaire.

Par conséquent, à partir du comportement des constituants en contraintes-déformations-température ( $\sigma, \varepsilon, T$ ), le comportement du biphasé sera donc précisé en fonction des concentrations volumiques des deux constituants.

Ces modèles supposent implicitement l'identité entre les comportements des constituants à l'état pur et au sein du composite. En particulier, ne sont pas prises en compte, ou supposées absentes, les interactions entre phases de nature physico-chimique (diffusion d'éléments, formation de précipités...). Ils supposent aussi les interfaces parfaites.

Pour tous les modèles, on adoptera comme notations :

- $\mu$  : module de cisaillement ;
- $\nu$  : coefficient de Poisson ;
- $K$  : coefficient de compressibilité volumique ;
- $E$  : module d'Young ;
- $\lambda$  : coefficient de conductibilité thermique ;
- $\alpha$  : coefficient de dilatation thermique ;
- $c_1$  : la concentration en phase 1 ;
- $c_2$  : la concentration en phase 2.

### 1.3.4 Modèle autocohérent de Budiansky

Le modèle autocohérent, d'abord présenté par Hershey [7] et Kröner [8] pour modéliser le comportement des matériaux polycristallins, a été modifié pour l'étude des matériaux biphasiques. Ce modèle, ici à inclusion sphérique, consiste à établir la loi de localisation en considérant que chaque phase est rassemblée dans un domaine sphérique entouré d'une phase dont le comportement est celui du milieu homogène équivalent qu'on cherche à déterminer. Cependant, quel que soit le processus d'homogénéisation, il faut noter qu'à partir d'informations partielles sur la microstructure et principalement sur la distribution spatiale des renforts, il est exclu de déterminer, sans ambiguïtés, le comportement effectif du composite.

Avec une telle simplification, la distribution interne des champs de contrainte et de déformation peut être évaluée de façon rigoureuse. Le modèle considère le renfort directement noyé dans le milieu homogène dont les propriétés sont celles recherchées. Des conditions aux limites sont imposées sur le milieu homogène. La technique de résolution peut être, par exemple, celle proposée par Eshelby [31].

Il n'y a cependant aucune raison de placer directement le renfort dans le milieu homogénéisé. En disposant le renfort dans un milieu plus raide que le milieu réel, on surestime inévitablement la rigidité du milieu homogénéisé. En outre on ne prend pas en compte la participation de la matrice qui se trouve à proximité du renfort.

Cet inconvénient a amené certains auteurs à utiliser des modèles plus réalistes, tel que celui proposé par Hill [9] et Budiansky [10]. Le comportement de ce dernier est identifié en faisant jouer tour à tour à chaque phase le rôle de l'inclusion dans cette même matrice et des relations de moyennes pondérées par les concentrations de chaque phase, entre ces différentes configurations. En écrivant les équations de localisation, à l'aide de la solution du problème d'Eshelby [31], on aboutit à une expression pour le tenseur de rigidité du composite recherché.

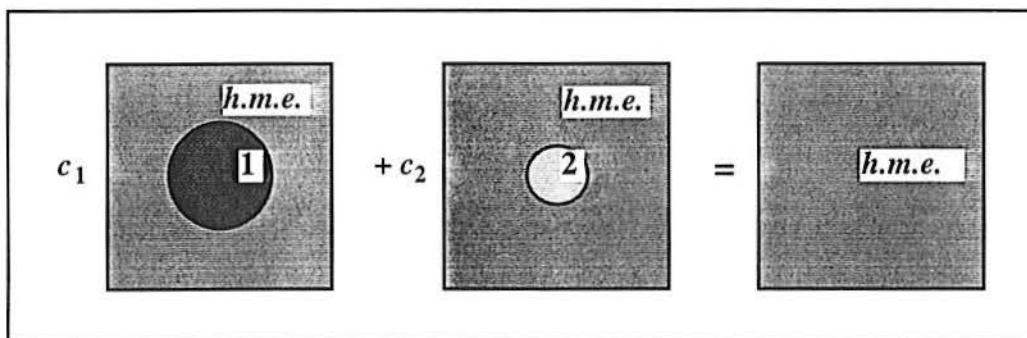


Figure (1.2) : Modélisation géométrique du modèle autocohérent



La solution analytique du module de cisaillement est la racine positive de l'équation du second degré suivante :

$$3\mu^2 + [(2 - 5c_1)\mu_1 + (2 - 5c_2)\mu_2]\mu - 2\mu_1\mu_2 = 0 \quad (1.2)$$

et le module de compressibilité est directement donné par l'équation suivante :

$$K = \frac{4\mu(c_2K_2 + c_1K_1) + 3K_1K_2}{4\mu + 3(c_2K_1 + c_1K_2)} \quad (1.3)$$

La première application de ce modèle à des particules sphériques a été proposée par Hill [9] et Budiansky [10]. Son extension au comportement thermique, en considérant qu'il n'y a pas de couplage d'effets mécaniques et thermiques et en respectant l'équation de conduction de chaleur  $T_{,ij} = 0$ , a été fournie par Budiansky [11] et Hashin [12], ce qui donne :

pour la conductibilité thermique :

$$2\lambda^2 + \lambda[3(c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1) - 2(\lambda_1 + \lambda_2)] - \lambda_1\lambda_2 = 0 \quad (1.4)$$

pour le coefficient de dilatation thermique :

$$\alpha = \frac{\alpha_1(K_2^{-1} - K^{-1}) - \alpha_2(K_1^{-1} - K^{-1})}{K_2^{-1} - K_1^{-1}} \quad (1.5)$$

Ce modèle attribue aux phases, d'un point de vue géométrique, un rôle parfaitement symétrique. En outre, Kröner a démontré que la signification morphologique de ce modèle correspond à une situation de *désordre parfait*. Pour visualiser ce désordre, on peut imaginer que la structure biphasée est construite en implantant de manière aléatoire des points d'une phase puis de l'autre phase de sorte qu'il n'existe aucune corrélation spatiale entre deux points.

C'est pourquoi il est souvent préférable d'introduire peu à peu dans la procédure de modélisation des hypothèses qui tendent à mieux décrire la situation morphologique réelle du matériau.

De plus, il peut être avantageux de réaliser cette extension à partir du modèle autocohérent. Cela permet d'utiliser la logique inclusion-matrice, et ainsi la solution d'un problème résolu dans des situations variées.

On peut ainsi modifier l'inclusion de base dans la procédure autocohérente classique, de sorte qu'elle ne soit plus un élément homogène, mais présente déjà une morphologie proche de la morphologie des phases.

### 1.3.5 Bornes de Hashin et Shtrikman

En suivant une approche variationnelle en élasticité linéaire et en conduction thermique pour des phases isotropes, Hashin et Shtrikman [3,5] montrent que le comportement effectif est compris entre deux bornes optimales. Pour un biphase à phases incompressibles, où une des phases est concentrée dans un domaine sphérique et l'autre formant la matrice, on montre en écrivant les équations de localisation, grâce à la solution du problème de l'inclusion d'Eshelby, que la borne supérieure est obtenue lorsque l'inclusion est constituée de la phase la plus *dure* et la borne inférieure quand elle est constituée de la phase la plus *tendre*.

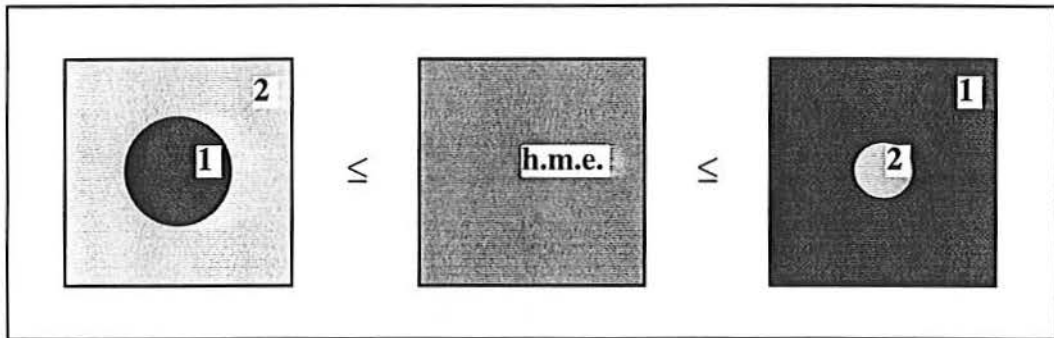


Figure (1.3) : Modélisation géométrique du modèle de Hashin et Shtrikman

Dans cette situation, en supposant que le matériau 1 soit le plus *tendre* et donc le matériau 2 le plus *dur*, ce qui peut se traduire encore en écrivant :

$$K_1 \leq K_2 ; \mu_1 \leq \mu_2 \quad (1.6)$$

on obtient alors :

pour le module de compressibilité :

$$K_2 + \frac{c_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3c_2}{3K_2 + 4\mu_2}} \leq K \leq K_1 + \frac{c_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3c_1}{3K_1 + 4\mu_1}} \quad (1.7)$$

et pour le module de cisaillement :

$$\mu_2 + \frac{c_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{6(K_2 + 2\mu_2)c_2}{5\mu_2(3K_2 + 4\mu_2)}} \leq \mu \leq \mu_1 + \frac{c_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{6(K_1 + 2\mu_1)c_1}{5\mu_2(3K_1 + 4\mu_1)}} \quad (1.8)$$

de même, pour le coefficient de conductibilité thermique

$$\lambda_2 \left( 1 + \frac{1 - c_2}{\frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{c_2}{3}} \right) \leq \lambda \leq \lambda_1 \left( 1 + \frac{1 - c_1}{\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{c_1}{3}} \right) \quad (1.9)$$

En ce qui concerne le coefficient de dilatation des composites à deux phases, le principal résultat est dû à Levin [32], et a été étendu plus généralement aux composites anisotropes par Rosen et Hashin [6].

Pour un simple matériau à deux phases, ils ont établi les expressions suivantes :

pour le coefficient de dilatation thermique :

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}} \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_1} \right) \quad (1.10)$$

Par cette relation,  $\alpha$  étant une fonction monotone de  $K$ , il suffit de remplacer maintenant  $K$  par ses bornes obtenues par le modèle de Hashin et Shtrikman pour obtenir un encadrement de  $\alpha$  :

$$\frac{4c_1c_2\mu_1(K_1 - K_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{3K_1K_2 + 4\mu_1\bar{K}} \leq \alpha - \bar{\alpha} \leq \frac{4c_1c_2\mu_2(K_1 - K_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{3K_1K_2 + 4\mu_2\bar{K}} \quad (1.11)$$

### 1.3.6 Modèle autocohérent à trois phases

Dans l'optique du renforcement des matériaux par des fibres ou des particules, ce modèle a été développé par Kerner [14], mais aussi par Van Der Pol [15] et Christensen et Lo [16, 17], pour l'étude de fibres cylindriques ou d'inclusions sphériques entourées par

une coquille de matrice (la coquille a un diamètre tel que le cube du rapport du volume de l'inclusion sur celui de l'ensemble *inclusion-coquille* soit égal à la fraction volumique des éléments de renforcement).

Le comportement global du matériau ainsi renforcé est obtenu en noyant l'inclusion composite dans le milieu homogène équivalent et en égalant l'énergie élastique emmagasinée par ce milieu à inclusion composite à l'énergie emmagasinée par un milieu constitué uniquement du milieu homogène équivalent, soumis au même chargement macroscopique.

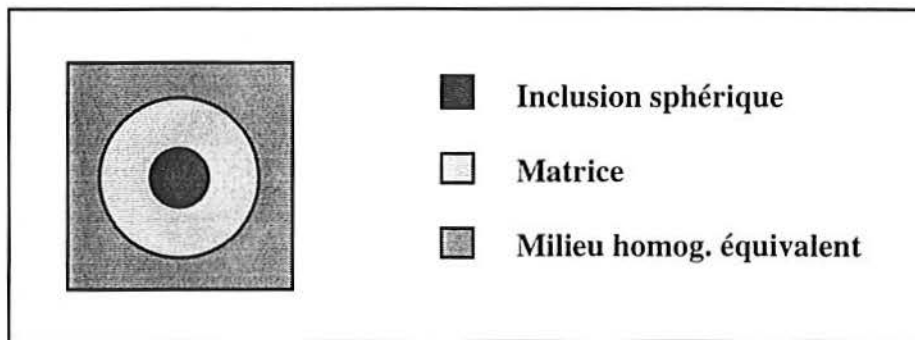


Figure (1.4) : Modélisation géométrique du modèle des trois phases

Dans le cas particulier de nos biphasés à phases incompressibles de concentration en inclusion  $c$ , et de module élastique  $\mu_i$ , enrobée par une matrice également incompressible et de module  $\mu_m$ , on obtient le module de cisaillement  $\mu$  par une équation de la forme :

$$A\left(\frac{\mu}{\mu_m}\right)^2 + 2B\left(\frac{\mu}{\mu_m}\right) + D = 0 \quad (\text{Christensen-Lo}) \quad (1.12)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont, dans le cas de l'incompressibilité des phases, uniquement fonction de  $c$ , de  $\mu_i$  et de  $\mu_m$ .

de même le module de compressibilité a pour expression :

$$K = K_m + \frac{c(K_i - K_m)}{1 + (1 - c) \left( \frac{K_i - K_m}{K_m + \frac{4}{3}\mu_m} \right)} \quad (\text{Kerner}) \quad (1.13)$$

où les indices  $i$  et  $m$  correspondent à ce qui se rattache, respectivement à l'inclusion et à la matrice.

En appliquant une méthode identique à la détermination du module de compressibilité, Kerner [20] a pu déterminer une expression du coefficient de conductibilité thermique :

$$\lambda = \lambda_m \left( 1 + \frac{c}{\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + \lambda_m)} + \frac{1 - c}{3}} \right) \quad (\text{Kerner}) \quad (1.14)$$

Il est à préciser que ce résultat est identique à la borne inférieure proposée par Hashin et Shtrikman [5] et vue précédemment.

### 1.3.7 Modèle autocohérent à $n + 1$ phases de Hervé-Zaoui

La méthode proposée par Hervé et Zaoui [18] est une extension du modèle à trois phases, au modèle autocohérent à  $n + 1$  phases. Ce modèle est représenté graphiquement sur la figure 1.5.

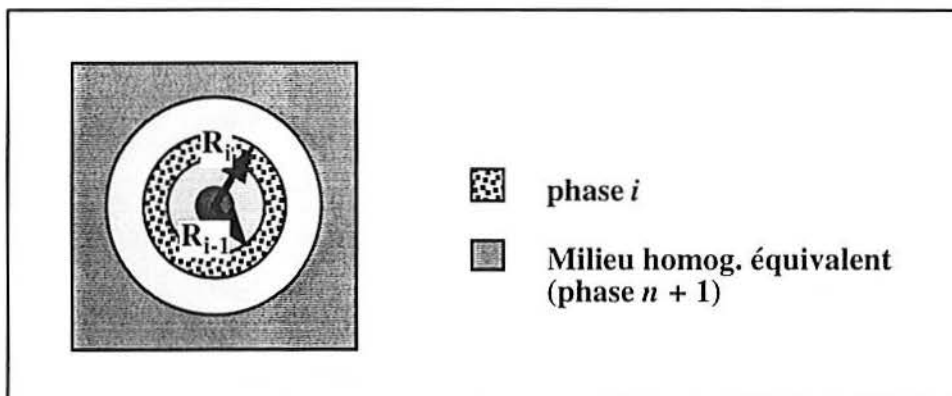


Figure (1.5) : Modélisation géométrique du modèle à  $n + 1$  phases de Hervé-Zaoui

En suivant le même principe, le module de compressibilité a pour expression :

$$K = \frac{3K_n R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} - 4\mu_n Q_{21}^{(n-1)}}{3(R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} + Q_{21}^{(n-1)})} \quad (1.15)$$

où les coefficients  $Q_{11}^{(n-1)}$  et  $Q_{21}^{(n-1)}$  sont des constantes qui dépendent uniquement des modules élastiques et des concentrations volumiques de chacune des phases.

et le module de cisaillement est solution de l'équation du second degré suivante :

$$A \left( \frac{\mu}{\mu_n} \right)^2 + B \left( \frac{\mu}{\mu_n} \right) + C = 0 \quad (1.16)$$

où  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont aussi des constantes dépendant des modules élastiques et des concentrations volumiques de chacune des phases.

Si  $n = 3$ , cas particulier où le V.E.R. est composé de quatre phases,

$$K = K_3 + \frac{(3K_3 + 4\mu_3)R_2^3 [(3K_3 + 4\mu_2)R_1^3 (K_1 - K_2) + (3K_1 + 4\mu_2)R_2^3 (K_2 - K_3)]}{\left[ \begin{array}{l} 3(K_2 - K_1)R_1^3 [(3K_3 + 4\mu_2)R_2^3 + 4(\mu_3 - \mu_2)R_3^3] \\ + (3K_1 + 4\mu_2)R_2^3 [3(K_3 - K_2)R_2^3 + (3K_2 + 4\mu_3)R_3^3] \end{array} \right]} \quad (1.17)$$

### 1.3.8 Modèle autocohérent à $n + 1$ phases appliqué à la détermination de la dilatation thermique

Il est intéressant de réécrire ce modèle pour l'adapter à la détermination de la dilatation thermique.

La démarche suivie tout au long de ces calculs est basée sur celle adoptée par E. Hervé et A. Zaoui [18] pour la détermination des modules mécaniques de composites à  $(n+1)$  phases.

Le V.E.R. retenu reste le même que celui utilisé par Hervé et Zaoui et sa modélisation géométrique est donnée sur la figure 1.5.

On impose un saut de température identique dans tout le système considéré, à savoir dans l'inclusion composite aussi bien que dans le milieu homogénéisé. Les champs de

déplacements et de contraintes hydrostatiques en résultant sont établis à l'aide de ceux proposés par Timoshenko et Goodier [33] de la manière suivante :

$$u_r^{(i)} = A_i r + \frac{B_i}{r^2} + C_i \alpha_i \Delta T r \quad (1.18)$$

$$\sigma_r^{(i)} = 3K_i A_i - 4\mu_i \frac{B_i}{r^3} - 4\mu_i C_i \alpha_i \Delta T \quad (1.19)$$

où  $A_i$  et  $B_i$  sont des constantes, et  $C_i = \frac{3K_i}{3K_i + 4\mu_i}$

Ces expressions peuvent être ramenées sous une forme encore plus simple :

$$u_r^{(i)} = D_i r + \frac{E_i}{r^2} + \alpha_i \Delta T r \quad (1.20)$$

$$\sigma_r^{(i)} = 3K_i D_i - 4\mu_i \frac{E_i}{r^3} \quad (1.21)$$

où  $D_i$  et  $E_i$  sont des constantes.

En tenant compte de la continuité des déplacements et des contraintes en  $r$  à l'interface ( $r = R_k$ ), comprise entre les phases  $k$  et  $k+1$ , on peut écrire :

$$J_k(R_k)V_k = J_{k+1}(R_k)V_{k+1} \quad (1.22)$$

avec  $V_k = (D_k, E_k, \Delta T)$

et  $J_i(r)$  est la matrice suivante :

$$J_i(r) = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{r^2} & \alpha_i r \\ 3k_i & -4\frac{\mu_i}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Si l'on pose  $N^{(k)}$  tel que :

$$V_{k+1} = N^{(k)}V_k \quad (1.24)$$

alors

$$N^{(k)} = J_{i+1}^{-1}(R_k) J_k(R_k) \quad (1.25)$$

avec

$$J_i^{-1}(r) = \frac{1}{3k_i + 4\mu_i} \begin{bmatrix} \frac{4\mu_i}{r} & 1 & -4\alpha_i\mu_i \\ 3k_i r^2 & -r^3 & -3\alpha_i k_i r^3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

et l'on obtient :

$$N^{(k)} = \frac{1}{3k_{k+1} + 4\mu_{k+1}} \begin{bmatrix} 3k_k + 4\mu_{k+1} & \frac{4}{R_k^3}(\mu_{k+1} - \mu_k) & 4\mu_{k+1}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\ 3(k_{k+1} - k_k)R_k^3 & 3k_{k+1} + 4\mu_k & 3k_{k+1}(\alpha_k - \alpha_{k+1})R_k^3 \\ 0 & 0 & 3k_{k+1} + 4\mu_{k+1} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

On pose  $Q^{(k)}$  tel que :

$$\bar{V}_{k+1} = \prod_{j=1}^k N^{(j)} \bar{V}_1 = Q^{(k)} \bar{V}_1 \quad (1.28)$$

on peut noter que  $Q_{31}^{(k)} = Q_{32}^{(k)} = 0$  et  $Q_{33}^{(k)} = 1$ .

A l'infini,  $\sigma_r = 0$ , ce qui entraîne :  $D_{n+1} = E_{n+1} = 0$

or

$$\bar{V}_{n+1} = N^{(n)} Q^{(n-1)} \bar{V}_1 \quad (1.29)$$

On peut en déduire, en posant  $k = k_{n+1}$ ,  $\mu = \mu_{n+1}$  et  $\alpha = \alpha_{n+1}$  :



$$\left\{ \begin{array}{l} D_{n+1} = \frac{1}{3k + 4\mu} \begin{bmatrix} (3k_n + 4\mu)(Q_{11}^{n-1}D_1 + Q_{13}^{n-1}\Delta T) \\ + \frac{4}{R_n^3}(Q_{21}^{n-1}D_1 + Q_{23}^{n-1}\Delta T) \\ + 4\mu(\alpha_n - \alpha)(Q_{31}^{n-1}D_1 + Q_{33}^{n-1}\Delta T) \end{bmatrix} = 0 \\ F_{n+1} = \frac{1}{3k + 4\mu} \begin{bmatrix} 3(k - k_n)(Q_{11}^{n-1}D_1 + Q_{13}^{n-1}\Delta T)R_n^3 \\ + (3k + 4\mu_n)(Q_{21}^{n-1}D_1 + Q_{23}^{n-1}\Delta T) \\ + 3kR_n^3(\alpha_n - \alpha)(Q_{31}^{n-1}D_1 + Q_{33}^{n-1}\Delta T) \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (1.30)$$

soit

$$\alpha = \alpha_n + \frac{(3k_n + 4\mu_n)(Q_{11}^{(n-1)}Q_{23}^{(n-1)} - Q_{13}^{(n-1)}Q_{21}^{(n-1)})}{3k_n R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} - 4\mu_n Q_{21}^{(n-1)}} \quad (1.31)$$

La vérification du modèle pour  $n = 2$  et  $n = 3$  a pu être établie et le résultat est alors identique à ceux proposés par Rosen & Hashin [6] et Papazoglou et Col. [21] respectivement.

Afin de contrôler nos résultats, on se propose de retrouver le résultat obtenu par Rosen & Hashin [6] déjà présenté, et celui écrit par Papazoglou et Col. [21] pour un matériau composite à quatre phases.

Dans le cas d'un modèle à trois phases, on pose  $n = 2$ , ce qui entraîne :

$$Q^{(n-1)} = Q^{(1)} = N^{(1)} = \frac{1}{(3k_2 + 4\mu_2)} \begin{bmatrix} 3k_1 + 4\mu_2 & \frac{4}{R_1^3}(\mu_2 - \mu_1) & 4\mu_2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 3(k_2 - k_1)R_1^3 & 3k_2 + 4\mu_1 & 3k_2 R_1^3(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 0 & 0 & 3k_2 + 4\mu_2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

alors :

$$\alpha = \alpha_2 + \frac{3k_2 R_1^3 (3k_1 + 4\mu_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 12\mu_2(\alpha_1 - \alpha_2)(k_2 - k_1)R_1^3}{3k_2 R_2^3 (3k_1 + 4\mu_2) - 12\mu_2(k_2 - k_1)R_1^3} \quad (1.33)$$

$$\alpha = \alpha_2 + \frac{ck_1(3k_2 + 4\mu_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{k_2(3k_1 + 4\mu_2) - 4\mu_2 c(k_2 - k_1)} \quad (1.34)$$

$c$  étant le taux volumique de renforts au sein de la matrice.

Le résultat obtenu est égal à celui donné par Rosen et Hashin, issu d'une démarche basée sur les principes de conservation de l'énergie.

Dans le cas d'un modèle à quatre phases, on pose  $n = 3$ , ce qui entraîne :

$$Q^{(n-1)} = Q^{(2)} = N^{(2)} \cdot N^{(1)} \quad (1.35)$$

$$\begin{cases} Q_{11}^{(2)} = \frac{1}{(3k_2 + 4\mu_2)(3k_3 + 4\mu_3)} \left[ (3k_1 + 4\mu_2)(3k_2 + 4\mu_3) + 12 \frac{R_1^3}{R_2^3} (\mu_2 - \mu_3)(k_1 - k_2) \right] \\ Q_{13}^{(2)} = \frac{1}{(3k_2 + 4\mu_2)(3k_3 + 4\mu_3)} \left[ 4\mu_3(\alpha_2 - \alpha_3)(3k_2 + 4\mu_2) + 4\mu_2(\alpha_1 - \alpha_2)(3k_2 + 4\mu_3) \right. \\ \left. - 12 \frac{R_1^3}{R_2^3} k_2(\alpha_1 - \alpha_2)(\mu_2 - \mu_3) \right] \\ Q_{21}^{(2)} = \frac{1}{(3k_2 + 4\mu_2)(3k_3 + 4\mu_3)} \left[ 3R_1^3(k_2 - k_1)(3k_3 + 4\mu_2) + 3R_2^3(k_3 - k_2)(3k_1 + 4\mu_2) \right] \\ Q_{23}^{(2)} = \frac{1}{(3k_2 + 4\mu_2)(3k_3 + 4\mu_3)} \left[ 3k_2 R_1^3(\alpha_1 - \alpha_2)(3k_3 + 4\mu_2) - 12R_2^3 \mu_2(\alpha_1 - \alpha_2)(k_2 - k_3) \right. \\ \left. + 3k_3 R_2^3(\alpha_2 - \alpha_3)(3k_2 + 4\mu_3) \right] \end{cases} \quad (1.36)$$

on peut alors en déduire le coefficient homogénéisé :

$$\alpha = \alpha_3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{F}{G} + (\alpha_2 - \alpha_3) \frac{G}{H} \quad (1.37)$$

où  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont des constantes ainsi définies :

$$\begin{cases} F = 3k_1(3k_2 + 4\mu_2)(3k_3 + 4\mu_3)c_1 \\ G = (3k_3 + 4\mu_3) \left[ 3k_2(c_1 + c_2)(3k_1 + 4\mu_2) + 12\mu_2 c_1(k_1 - k_2) \right] \\ H = 3(k_2 - k_1) \left[ 12k_3(\mu_3 - \mu_2) \frac{c_1}{c_1 + c_2} - 4\mu_3 c_1(3k_3 + 4\mu_2) \right] \\ \quad + (3k_1 + 4\mu_2) \left[ 12\mu_3(c_1 + c_2)(k_2 - k_3) + 3k_3(3k_2 + 4\mu_3) \right] \end{cases} \quad (1.38)$$

$c_1$  et  $c_2$  étant les taux volumiques des phases 1 et 2 englobées dans la phase 3.

Le résultat obtenu est identique à celui proposé par Papazoglou et Col. [21], développé pour la détermination de la dilatation thermique à partir d'un modèle à quatre phases.

### 1.3.9 Modèle autocohérent à $n + 1$ phases appliqué à la détermination de la conductibilité thermique

De la même façon on peut traiter le cas de la conductibilité thermique, et donc tout en conservant la même procédure, aboutir à une expression simple du coefficient effectif de la conductibilité thermique.

Afin de fixer un gradient de température, on impose des températures sur deux plans  $P_1$  et  $P_2$  perpendiculaires à l'axe  $ox_3$ . Ces plans sont choisis de façon symétrique par rapport au plan  $(o, x_1, x_2)$  et infiniment éloignés de ce dernier. Les températures sur ces deux plans sont constantes et ont pour expression :  $T = \beta x_3$  où  $x_3 \rightarrow \infty$

Les  $x_3$  sont les cotes des plans  $P_1$  et  $P_2$ .

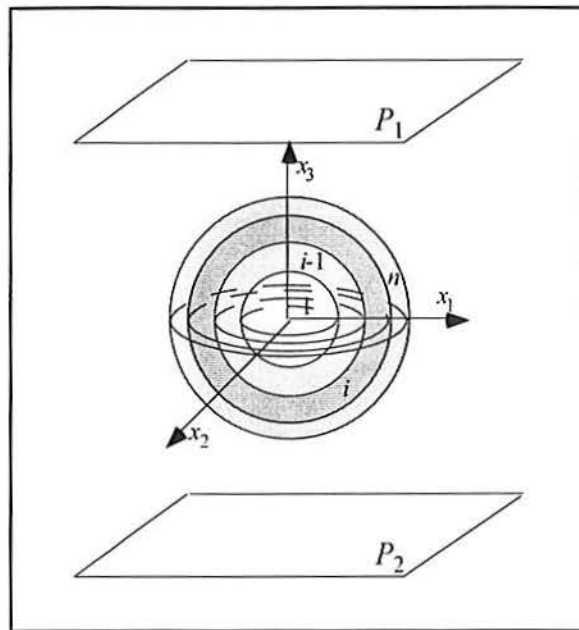


Figure 1.6 : température imposée suivant l'axe  $x_3$

En respectant les conditions  $\nabla^2 T^{(i)} = 0$  pour chaque phase ( $i$ ) du composite et en utilisant les coordonnées sphériques en respectant la symétrie axiale autour de l'axe  $x_3$ ,

$$\nabla^2 = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.39)$$

La solution des conditions précédentes permet d'écrire la température de chaque phase ( $i$ ) du composite sous la forme :

$$T^{(i)} = \left( F_i r + \frac{G_i}{r^2} \right) \cos \theta \quad (1.40)$$

où  $F_i$  et  $G_i$  sont des constantes.

Le flux de chaleur correspondant s'écrit alors :

$$q^{(i)} = -\lambda_i \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x_i} \quad (1.41)$$

soit

$$\begin{cases} q_r^{(i)} = -\lambda_i \left( F_i - 2 \frac{G_i}{r^3} \right) \cos \theta \\ q_\theta^{(i)} = \lambda_i \left( F_i + \frac{G_i}{r^3} \right) \sin \theta \end{cases}$$

En tenant compte de la continuité de la température et du flux de chaleur en  $r$  à l'interface ( $r = R_k$ ), comprise entre les phases ( $k$ ) et ( $k + 1$ ), on peut écrire :

$$J_k(R_k)V_k = J_{k+1}(R_k)V_{k+1} \quad (1.42)$$

avec  $V_k = (F_k, G_k)$

et  $J_i(r)$  est la matrice suivante :

$$J_i(r) = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{r^2} \\ \lambda_i & -2 \frac{\lambda_i}{r^3} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Si l'on pose  $N^{(k)}$  tel que :

$$V_{k+1} = N^{(k)}V_k \quad (1.44)$$

alors

$$N^{(k)} = J_{k+1}^{-1}(R_k)J_k(R_k) \quad (1.45)$$

$$N^{(k)} = \frac{1}{3\lambda_{k+1}} \begin{bmatrix} 2\lambda_{k+1} + \lambda_k & \frac{2}{R_k^3}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \\ (\lambda_{k+1} - \lambda_k)R_k^3 & \lambda_{k+1} + 2\lambda_k \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

On pose  $Q^{(k)}$  tel que :

$$V_{k+1} = \prod_{j=1}^k N^{(j)} V_1 = Q^{(k)} V_1 \quad (1.47)$$

A partir de cette dernière équation, et considérant que  $G_1 = 0$ , car la température doit avoir une valeur finie en  $r = 0$ , on trouve :

$$F_1 = \frac{1}{Q_{11}^{(n)}} F_{n+1} \quad (1.48)$$

alors tous les coefficients  $F_k$ , et  $G_k$  peuvent s'écrire ainsi :

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \frac{Q_{11}^{(k-1)}}{Q_{11}^{(n)}} F_{n+1} \\ G_k &= \frac{Q_{11}^{(k-1)}}{Q_{21}^{(n)}} F_{n+1} \end{aligned} \right\} \text{pour } k \in [1, n] \quad (1.49)$$

où  $F_{n+1} = \beta$  dans le cas d'une approche en température imposée.

Les gradients moyens de température dans chaque phase peuvent facilement être calculés par l'équation :

$$\left( \overline{\frac{\partial T}{\partial x_i}} \right) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV = \frac{1}{V_i} \left[ \int_{S_i} T^{(i)} n_i dS + \int_{S_{i-1}} T^{(i)} n_i dS \right] \quad (1.50)$$

où  $V_i$  est le volume de la coquille occupée par la phase  $(i)$ , limité par  $S_{i-1}$  et  $S_i$  et  $n = (n_1, n_2, n_3)^T$  est le vecteur unité normal à  $S_i$  (normale extérieure à la phase  $i$ ).

De la même façon, on peut écrire le gradient de température moyen dans l'inclusion à  $n$  phases :

$$\left( \overline{\frac{\partial T}{\partial x_i}} \right) = \frac{3}{4\pi R_n^3} \int_{S_n} T^{(n)} n_i dS \quad (1.51)$$

On peut démontrer (Cf [17]) que la valeur moyenne du gradient de température dans la direction  $x_j$ , calculée sur le volume  $V_n$  contenant les  $n$  phases est égale à  $\beta$ . Cette valeur correspond au gradient de température dans le matériau homogénéisé avec les conditions aux limites imposées. On pose alors :

$$\left(\overline{\frac{\partial T}{\partial z}}\right) = \frac{3}{4\pi R_n^3} \int_{S_n} T^{(n)} \cos\theta dS = \beta \quad (1.52)$$

$$\left(\overline{\frac{\partial T}{\partial z}}\right) = F_{n+1} + \frac{G_{n+1}}{R_n^3} = \beta \quad (1.53)$$

et en tenant compte de la conservation du gradient de température, on en tire  $G_{n+1} = 0$   
or

$$V_{n+1} = N^{(n)} Q^{(n-1)} V_1 \quad (1.54)$$

On peut en déduire, en posant  $\lambda = \lambda_{n+1}$ :

$$G_{n+1} = \frac{1}{3\lambda} [(\lambda - \lambda_n) R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} + (\lambda + 2\lambda_n) Q_{21}^{(n-1)}] F_1 \quad (1.55)$$

soit

$$\lambda = \frac{\lambda_n (R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} - 2Q_{21}^{(n-1)})}{R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} + Q_{21}^{(n-1)}} \quad (1.56)$$

Afin de contrôler cette équation, on se propose de retrouver les résultats obtenus par le modèle à trois phases écrit par Kerner [20], et le modèle à quatre phases de Maurer [18].

Dans le cas du modèle à trois phases, on pose  $n = 2$ , ce qui entraîne :

$$Q^{(n-1)} = Q^{(1)} = N^{(1)} = \frac{1}{3\lambda_2} \begin{bmatrix} 2\lambda_2 + \lambda_1 & \frac{2}{R_1^3} (\lambda_2 - \lambda_1) \\ (\lambda_2 - \lambda_1) R_1^3 & \lambda_2 + 2\lambda_1 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

on en tire alors :

$$\lambda = \frac{\lambda_2 (R_2^3 (2\lambda_2 + \lambda_1) - 2(\lambda_2 - \lambda_1) R_1^3)}{R_2^3 (2\lambda_2 + \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (1.58)$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$\lambda = \lambda_2 \left( 1 + \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_2)}{(1-c)(\lambda_1 - \lambda_2) + 3\lambda_2} \right) \quad (1.59)$$

$c$  étant le taux volumique de renforts au sein de la matrice.

Le résultat obtenu est bien celui proposé par Kerner. Ce résultat est aussi identique à la borne inférieure proposée par Hashin et Shtrikman [5].

Dans le cas du modèle à quatre phases, on pose  $n = 3$ , ce qui entraîne :

$$\begin{cases} Q_{11}^{(2)} = \frac{1}{9\lambda_2\lambda_3} \left[ (2\lambda_3 + \lambda_2)(2\lambda_2 + \lambda_1) + \frac{2(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)R_1^3}{R_2^3} \right] \\ Q_{21}^{(2)} = \frac{1}{9\lambda_2\lambda_3} \left[ (\lambda_3 - \lambda_2)(2\lambda_2 + \lambda_1)R_2^3 + (\lambda_3 + 2\lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)R_1^3 \right] \end{cases} \quad (1.60)$$

en substituant, on obtient finalement :

$$\lambda = \lambda_3 + \frac{3\lambda_3 R_2^3 [(2\lambda_2 + \lambda_3)R_1^3 (\lambda_1 - \lambda_2) + (2\lambda_2 + \lambda_1)R_2^3 (\lambda_2 - \lambda_3)]}{\left[ (\lambda_2 - \lambda_1)R_1^3 [3\lambda_3 R_2^3 + (\lambda_3 - \lambda_2)R_3^3] \right.} \quad (1.61)$$

$$\left. + (2\lambda_2 + \lambda_1)R_2^3 [(\lambda_3 - \lambda_2)R_2^3 + (2\lambda_3 + \lambda_2)R_3^3] \right]}$$

Ce résultat est identique à celui proposé par Maurer [18], pour la détermination de la constante diélectrique à partir d'un modèle à quatre phases.

REMARQUE :

Cette formulation du coefficient effectif pour le problème de la conductibilité thermique s'applique également à d'autres problèmes de physique, tels que la constante diélectrique, la perméabilité magnétique ou la conductivité électrique.

### 1.3.10 Modèle autocohérent à quatre phases appliqué aux composites biphasiques

Si l'on désire appliquer le modèle de Hervé-Zaoui ramené à quatre phases à un milieu biphasique (donc ne contenant pas d'interphase), on se heurte alors à un problème de répartition volumique des deux phases en trois parties distinctes que sont *l'inclusion*, *l'interphase* et *la matrice* du modèle de Hervé-Zaoui.

François de Larrard et Robert Le Roy ont eux proposé "un modèle géométrique d'homogénéisation pour les composites biphasiques à inclusion granulaire de large étendue" [34], tenant mieux compte de la configuration réelle des matériaux.

Prenons un volume unité de composite ( $V_c = 1$ ). Le taux de renforts ( $V_r$ ), qu'ils soient particuliers ou unidirectionnels, est en pratique limité par la compacité maximale à sec de ces renforts, appelée taux de compacité optimale ( $V_{r\max}$ ), cette configuration correspondant à l'inversion des phases renfort et matrice. Pour des valeurs de  $V_r$  tendant à se rapprocher de  $V_{r\max}$ , il existe une probabilité de plus en plus élevée pour les renforts de s'agglomérer en enfermant ainsi une partie de la matrice ( $V_{me}$ ) (Figure 1.7).

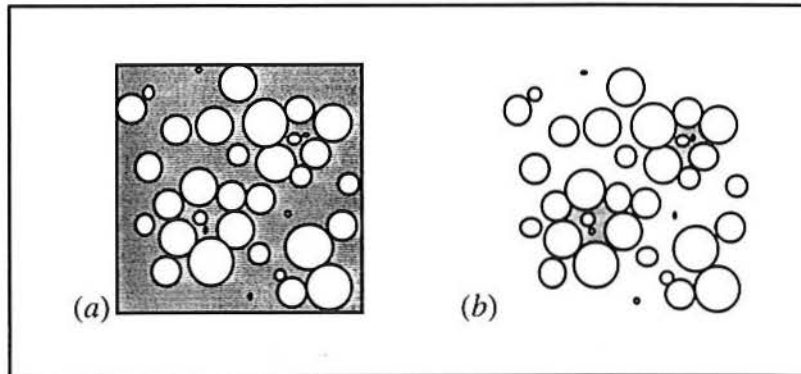


Figure 1.7 : Agrégats de renforts pris dans la matrice

(a) Composite réel de volume  $V_c$ ,

(b) Composite formé des renforts et de la partie *enfermée* de la matrice de volume  $V$

Si l'on appelle  $V$  la somme du volume des renforts et de celui de la partie *enfermée* de la matrice, alors on peut poser :

$$V_{r\max} = \frac{V_r}{V} \quad (1.62)$$

Et pour le volume de la matrice enfermée :

$$V_{me} = (1 - V_{r\max})V = (1 - V_{r\max}) \frac{V_r}{V_{r\max}} \quad (1.63)$$

Le reste de la matrice, plus libre, a maintenant un volume  $V_{ml}$  égal à :

$$V_{ml} = 1 - \frac{V_r}{V_{r\max}} \quad (1.64)$$

On analyse alors le matériau comme un nouveau composite, dont la matrice, de même nature que la matrice initiale, a un volume  $V_{ml}$  et l'inclusion, un matériau fictif consti-



tué du renfort et de la matrice enfermée, un volume  $V_r / V_{r\max}$ . Ce composite peut être schématisé par une nouvelle cellule élémentaire représentée sur la figure 1.8.

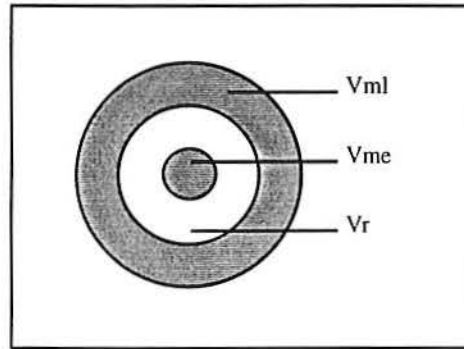


Figure 1.8 : Cellule élémentaire du composite

De Larrard et Le Roy ont utilisé ce motif géométrique avec le modèle de Hashin (1962), par étapes, en résolvant d'abord le problème au niveau des deux sphères intérieures, puis en y ajoutant la sphère extérieure.

Cette approximation est d'autant plus acceptable que la quantité  $V_{r\max}$  est proche de 1, et, par conséquent, que l'étendue granulaire de l'inclusion réelle est large.

Pour la suite de cette étude, nous appellerons ce modèle autocohérent à quatre phases\*. On peut bien entendu l'appliquer pour la détermination des modules mécaniques ou même thermiques, ce qui fournit les équations suivantes :

pour le module de compressibilité :

$$K = K_m + \frac{(3K_m + 4\mu_m)(3K_m + 4\mu_r)}{(3K_r + 4\mu_r)(3K_m + 4\mu_m) + 12 \frac{V_{r\max}}{V_r} (\mu_r - \mu_m) - 3(3K_m + 4\mu_r)} \quad (1.65)$$

pour le module de cisaillement, solution de l'équation du second degré suivante :

$$A \left( \frac{\mu}{\mu_n} \right)^2 + B \left( \frac{\mu}{\mu_n} \right) + C = 0 \quad (1.66)$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont uniquement fonction de  $V_r$ ,  $V_{r\max}$ ,  $\mu_r$  et  $\mu_m$ .

pour le coefficient de conductibilité thermique :

$$\lambda = \lambda_m + \frac{3\lambda_m(2\lambda_r + \lambda_m)(\lambda_r - \lambda_m)}{\frac{-2(\lambda_m - \lambda_r)^2}{V_{r\max}} + \frac{7\lambda_r\lambda_m + \lambda_r^2 + \lambda_m^2}{V_r} + \frac{V_{r\max}}{V_r}(\lambda_m - \lambda_r)^2 + 3\lambda_m(\lambda_m - \lambda_r)} \quad (1.67)$$

pour le coefficient de dilatation thermique :

$$\alpha = \alpha_m + (\alpha_r - \alpha_m) \frac{L}{H} \quad (1.68)$$

avec :

$$L = 3K_r(3K_m + 4\mu_m)(3K_m + 4\mu_r)$$

$$H = 3K_m \frac{(3K_r + 4\mu_r)(3K_m + 4\mu_m)}{V_r} + 36K_m \frac{V_{r\max}}{V_r} (K_r - K_m)(\mu_r - \mu_m) + 12\mu_m(K_r - K_m)(3K_m + 4\mu_r)$$

Les indices  $m$  et  $r$  correspondent respectivement à la matrice et aux renforts.

### 1.3.11 Applications originales du modèle à quatre phases\*

Nous avons présenté dans un article [35] des résultats obtenus en élasticité et en viscoélasticité en couplant les modèles à  $n+1$  phases Hervé et Zaoui [18] et de Pastor *et al* [36], et la répartition proposée par de Larrard et Le Roy. Ces résultats sont de nouveau exposés ci-après :

#### Composite particulière en viscoélasticité

Le matériau étudié est un composite dont la matrice est une résine polystyrène, et les renforts sont des billes de verre dont le diamètre varie de 70 à 110  $\mu\text{m}$ , et dont la répartition granulométrique est inconnue, ce qui nous conduit à déterminer la compacité maximale des billes de façon expérimentale. Le taux de renforts maximal ainsi obtenu est de l'ordre de 64 % en volume. Les modules complexes sont ici calculés à l'aide du principe de correspondance Mandel [37], et de la technique d'évaluation du coefficient de Poisson complexe utilisée par Nguyen Viet *et al* [38] sur la base d'une idée de Theocaris [39]. La première évaluation de ce coefficient, non accessible expérimentalement, a été proposée par Agbossou *et al* [40]. Ces auteurs ont étendu aux modules complexes l'idée de Theocaris à l'aide d'une technique d'approximations successives. Nguyen Viet *et al* ont montré que cette technique équivaut à ce que le module de compressibilité reste constant et réel, autrement dit à ce que la matrice soit viscoélastique en ci-

saillement seulement, comme souvent posé. La technique utilisée ici relaxe cette dernière approximation.

Sur la figure 11.9 sont présentées à titre de comparaison les valeurs calculées à l'aide de la solution de Hervé et Zaoui appliquée au modèle géométrique préalablement défini (Fig. 1.9-courbe a), les valeurs calculées avec le modèle à trois phases de Christensen et Lo (Fig. 1.9-courbe b), ainsi que les résultats expérimentaux (Fig. 1.9-courbe c), avec  $E_m = 3,1 \text{ GPa}$ ,  $\nu_m = 0,33$ ,  $\tan \delta = 1,24 \cdot 10^{-2}$ ,  $E_r = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu_r = 0,2$ .

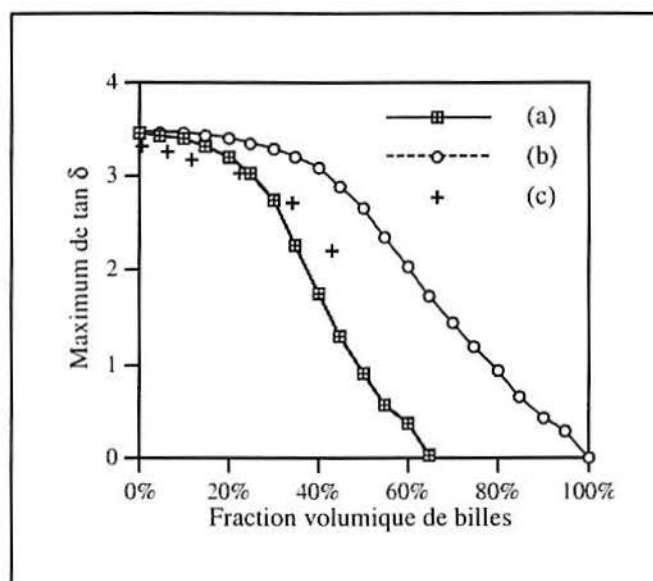


Figure 1.9 : Facteur de perte en fonction de la fraction volumique de billes

Les résultats que nous obtenons, à fort taux volumique de renforts, demeurent inférieurs aux résultats expérimentaux. Ceci est a priori normal car le résultat du calcul devrait être considéré *comme une borne inférieure du résultat exact*, puisque le modèle suppose implicitement que les renforts s'agrègent en formant des inclusions identiques, en situation de désordre parfait, comportant en leur sein le volume minimal *pratique* de matrice enfermée.

Néanmoins, ces résultats sont plus réalistes que ceux fournis par le modèle de Christensen et Lo, si l'on considère que le facteur de perte du composite est en réalité négligeable pour des taux de billes supérieurs à 64 %, taux dit plus haut de compacité optimale pratique, où les billes devenues jointives limitent la déformation de la matrice enfermée. La méthode proposée ici tient donc compte autant que possible, par voie expérimentale, du caractère généralement distribué de la granulométrie des billes de verre.

### Composite unidirectionnel en élasticité

Nous avons étudié aussi le cas d'un composite à renforts unidirectionnels verre-époxy en traction simple transversale, pour lequel les résultats expérimentaux ont été obtenus par Lagache *et al* [41]. Les fibres de verre sont de même diamètre, et la compacité maximale théorique des fibres, correspondant à un empilement hexagonal compact, est égale à 90,7 %. Cette limite classique n'est en fait jamais atteinte en pratique; aussi allons-nous, comme ci-dessus, utiliser la limite reconnue par les praticiens de ces composites et confirmé par Gutowski *et al* [42] qui est de 76 % environ en volume. En isotropie transverse, le modèle d'homogénéisation utilisé pour résoudre notre problème à quatre phases est celui proposé par Pastor et Nguyen Viet. Comme pour le cas traité précédemment, les résultats obtenus (Fig. 1.10-courbe a) sont confrontés de nouveau au modèle de Christensen et Lo (Fig. 1.10-courbe b) ainsi qu'aux résultats expérimentaux (Fig. 1.10-courbe c), avec  $E_m = 2,9$  GPa,  $\nu_m = 0,4$ ,  $E_r = 73,0$  GPa,  $\nu_r = 0,22$ .

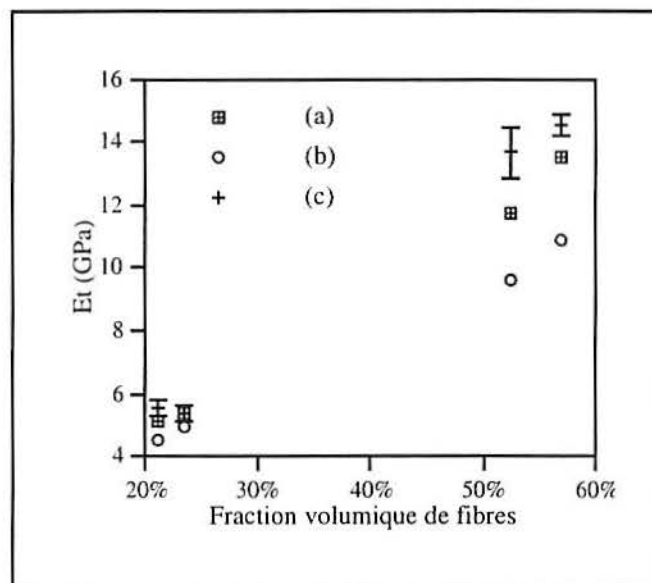


Figure 1.10 : Module d'Young transverse en fonction de la fraction volumique de fibres

S'il existe une bonne adéquation entre les résultats théoriques et expérimentaux pour des taux de renforts de l'ordre de 20 %, il subsiste par contre un écart pour de forts taux de renforts, mais cet écart moyen passe de 25 à 8 % quand nous utilisons le modèle présenté. L'explication la plus réaliste de cet écart résiduel est bien une modification des propriétés de la matrice in situ. En effet, une simple augmentation du module d'Young de la matrice faisant passer celui-ci de 2,9 à 3,2 GPa (valeur parfaitement admissible pour un réseau époxy fortement réticulé) permet aux valeurs théoriques de figurer dans la fourchette des résultats expérimentaux.

Le modèle présenté a pour principaux avantages la simplicité et la facilité de contrôle du taux de compacité optimal. De plus le résultat, obtenu sans approximation supplémentaire, est de bonne qualité, particulièrement si l'on tient compte de la simplicité du modèle.

De ce fait, on peut affirmer que ce modèle améliore sensiblement la capacité de prédiction des caractéristiques mécaniques des matériaux biphasés étudiés. Reste cependant à améliorer l'approximation que constituent les modèles à quatre phases pour les taux de renforts fibreux ou particuliers.

## 1.4 Le matériau étudié

### 1.4.1 Les composants

Les matériaux antifriction utilisés sur les coussinets de paliers de vilebrequin des moteurs à combustion interne, ou les paliers de certains mécanismes tels que des pompes à engrenages, ont des structures comportant des hétérogénéités périodiques. La tendance actuelle de ce type de matériau est d'être constitué de deux phases, l'une est la phase dure constituant la matrice supportant les sollicitations mécaniques, l'autre est la phase tendre qui a pour objet de jouer le rôle de lubrifiant lors de contact entre les surfaces antagonistes du palier.

L'utilisation des alliages d'aluminium dans le domaine des matériaux de frottements, s'est imposée depuis plusieurs dizaines d'années en raison des avantages apportés par l'aluminium, par rapport aux alliages traditionnels à base de plomb, d'étain ou de cuivre, en terme de performance, coût et pollution.

De nombreuses formules d'alliages d'aluminium ont été proposées et expérimentées, mais actuellement, il apparaît que les alliages de la famille Al-Sn prennent une importance de plus en plus grande [35].

Il est utile de rappeler que la solubilité de l'étain dans l'aluminium est extrêmement faible (de l'ordre de 0,01 %), et qu'il existe un eutectique Sn-Al à 99,5 % (en masse) d'étain.

Du fait de cette non *miscibilité* à l'état solide des deux éléments Al et Sn, et de la différence de température de solidification de ces deux éléments, l'étain a tendance à former un film continu au pourtour des grains primaires d'aluminium lors du refroidissement lent d'un composé binaire ayant une proportion massique d'étain supérieure à 10 %.

Or, pour obtenir une bonne tenue mécanique, une bonne ductilité ainsi que de bonnes propriétés de frottements, il y a lieu de briser cette tendance filmogène de l'étain par addition de nickel et de cuivre, mais en très faibles quantités. Ces composants modifient la taille des grains d'aluminium et agissent ainsi comme des affineurs de grains.

Pour l'application des modèles d'homogénéisation préalablement cités, il est avantageux de travailler à partir d'un matériau présentant des phases composées de métaux purs, non miscibles, et donc sans risque de formation d'une phase tertiaire, mais pouvant présenter une faible zone d'interdiffusion préservant la cohésion du matériau au cours des essais mécaniques.

Le couple Al-Sn répond très bien à ces exigences, et présente en outre l'avantage d'avoir un contraste important du comportement mécanique des deux matériaux.

Les alliages d'aluminium étudiés ici comportent 6 %, 20% et 40% d'étain en masse, et se trouvent respectivement commercialisés en France sous les noms de Sical 6, Sical 20 et Sical 40. Une analyse chimique a permis de déterminer avec précision la composition massique de nos matériaux (Tableau 1.1).

COMPOSANT	SICAL 6	SICAL 20	SICAL 40
Aluminium	90,923 %	77,433 %	57,433 %
Etain	6,51 %	20,00 %	40,00 %
Cuivre	1,33 %	1,33 %	1,33 %
Nickel	0,865 %	0,865 %	0,865 %
Impuretés	0,372 %	0,372 %	0,372 %

Tableau 1.1 : Composition massique des alliages aluminium-étain

Pour le calcul des caractéristiques mécaniques mais aussi thermiques d'un milieu homogène équivalent à ces alliages, nous sommes obligés de négliger la part des impuretés et la composition volumique est donc prise comme suit (Tableau 1.2) :

COMPOSANT	SICAL 6	SICAL 20	SICAL 40
Aluminium	96,71 %	90,72 %	82,15 %
Etain	2,57 %	8,56 %	17,13 %
Cuivre	0,48 %	0,48 %	0,48 %
Nickel	0,24 %	0,24 %	0,24 %

Tableau 1.2 : Composition volumique des alliages aluminium-étain

### 1.4.2 Les caractéristiques des composants

Les caractéristiques élastiques et thermiques à 293°K des divers constituants sont ainsi données dans le tableau 1.3 :

COMPOSANT	Al	Sn	Cu recuit	Ni recuit
$E$ (GPa)	72,0	12,79	12,0	21,0
$\nu$	0,34	0,357	0,34	0,33
$K$ (GPa)	75,0	14,91	12,5	20,59
$\mu$ (GPa)	26,87	4,71	4,478	7,895
$\alpha$ ( $10^{-6}$ /°K) de 393 à 493°K	24,83.10 <sup>-6</sup>	24,93.10 <sup>-6</sup>	16,5.10 <sup>-6</sup>	13,3.10 <sup>-6</sup>
$\lambda$ (W/m°K)	237,0	66,6	401	90,7
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2707	7304	8954	8906

Tableau 1.3 : Caractéristiques à 293°K des divers constituants

Pour l'application des modèles préalablement définis, il est préférable de ne conserver que deux phases (l'une pour la matrice et l'autre pour l'inclusion).

Vu les très faibles teneurs en volume en cuivre et en nickel, et la bonne répartition quasi homogène de ces composants, on peut considérer une seule phase constituée de l'aluminium, du cuivre et du nickel, dont le pourcentage volumique serait respectivement de 97,43 %, 91,44 % et 82,87 %. De plus l'adjonction de Nickel dans un alliage modifie considérablement les propriétés de l'alliage, de sorte qu'elle n'obéit pas aux d'homogénéisation.

C'est pourquoi nous préférons utiliser les caractéristiques de l'alliage AU2G, trouvées aisément dans la littérature, et qui correspondent bien à celles de l'alliage considéré.

Les caractéristiques à 293°K, 343°K, 393°K, et 443°K de nos composants tels qu'elles sont retenues pour l'application aux modèles d'homogénéisation sont donc les suivants (Tableau 1.4, 1.5, 1.6, 1.7) :



COMPOSANT	AU2G	Sn
$E$ (GPa)	71,31	12,79
$\nu$	0,34	0,357
$K$ (GPa)	73,96	14,91
$\mu$ (GPa)	26,62	4,71
$\alpha$ ( $^{\circ}\text{K}$ ) de 293 à 493°K	$24,10 \cdot 10^{-6}$	$24,93 \cdot 10^{-6}$
$\lambda$ (W/m°K)	170,0	66,6

Tableau 1.4 : Caractéristiques des constituants à 293°K

COMPOSANT	AU2G	Sn
$E$ (GPa)	67,67	10,07
$\nu$	0,34	0,36
$K$ (GPa)	70,18	11,99
$\mu$ (GPa)	25,26	3,70

Tableau 1.5 : Caractéristiques des constituants à 343°K

COMPOSANT	AU2G	Sn
$E$ (GPa)	63,06	6,18
$\nu$	0,34	0,38
$K$ (GPa)	65,40	8,58
$\mu$ (GPa)	23,54	2,24

Tableau 1.6 : Caractéristiques des constituants à 393°K

COMPOSANT	AU2G	Sn
$E$ (GPa)	57,79	1,78
$\nu$	0,34	0,42
$K$ (GPa)	59,94	3,71
$\mu$ (GPa)	21,57	0,63

Tableau 1.7 : Caractéristiques des constituants à 443°K



Pour l'application du modèle à quatre phases\*, on retiendra la valeur de 0,96 pour  $V_{r\max}$ , valeur correspondant à la teneur massique de 10 % en étain à partir de laquelle l'étain a tendance à former un réseau réticulaire autour des grains d'aluminium.

## 1.5 Caractérisations mécanique, thermomécanique et thermique

### 1.5.1 Caractérisation mécanique

Les essais mécaniques sont réalisés sur une machine de traction Schenck-Treble de  $10^4$  N, munie de mors hydrauliques autoserrants, à l'intérieur d'une enceinte thermique Eurotherm 818.

Deux types de mesure seront ici réalisés, dans le but d'évaluer le module d'Young à un l'aide d'un extensomètre de type D.S.A. et de jauges résistives unidirectionnelles, ainsi que le coefficient de Poisson à l'aide de jauges résistives bidirectionnelles.

Les éprouvettes utilisées sont de type rectangulaire, usinées directement dans un pain de nos alliages. Les caractéristiques géométriques sont les suivantes :

- longueur totale : 150 mm ;
- largeur : 20 mm ;
- longueur de référence : 25 mm (pour l'utilisation du DSA) ;
- distance entre les mâchoires : 90 mm ;
- épaisseur : 4 mm.

Les jauges de déformations sont des "Vishay-Micromesures" de type "EA-13-125AD-120" en unidirectionnelles, et de type "EA-13-125TM-120" en bidirectionnelles.

Le système d'acquisition et de traitement des données est le pont de mesure "Système 4000" de "Vishay-Micromesures".

Les températures d'essais sont de 293, 343, 393, et 443°K.

#### Module d'Young :

Au cours des essais effectués pour la mesure du module d'Young, à une vitesse de déformation de 5 mm/min, on enregistre la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$  sur une série

de 10 éprouvettes par nuance d'alliage et de gamme de température. L'appareillage est composé d'une machine de traction Schenk (RSA 100), de capacité maximale de 100 kN, d'un système d'acquisition et de dépouillement des résultats totalement informatisé. Cet appareil est équipé d'un extensomètre de précision de type D.S.A. utilisé en plus de l'indicateur d'allongement pour les mesures à faibles températures, et à l'aide de jauges résistives pour des températures plus élevées. Le système d'ancrage se compose d'un ensemble de mors hydrauliques à pression ajustable, fonction du type de matériau étudié.

Le module d'élasticité à l'origine est ainsi calculé :

$$E = \frac{F_1 L_0 A}{S_0 Z_1} \quad (1.69)$$

avec :

- $F_1$  = charge en newtons,
- $L_0$  = longueur de référence de l'extensomètre (= 25 mm),
- $A$  = coefficient d'amplification de l'extensomètre,
- $S_0$  = section droite initiale (= 80 mm<sup>2</sup>),
- $Z_1$  = allongement apparent mesuré sur la courbe, en millimètres, pour la charge  $F_1$ .

NOTA : l'étain est un métal présentant une plage élastique très faible, il faut donc diminuer en conséquence l'intervalle de mesure et d'enregistrement des forces et déformations pour relever un comportement le plus linéaire possible. Cette remarque est d'autant plus vraie si l'on travaille à des températures élevées.

#### Coefficient de poisson :

Les jauges résistives utilisées pour la mesure du coefficient de Poisson sont des rosettes bidirectionnelles à 90°. Les essais sont réalisés avec une vitesse de déformation toujours imposée à 5 mm/min, sur 4 éprouvettes par nuance d'alliage. Sur certaines d'entre elles ont été montées deux rosettes, une sur chaque face de l'éprouvette, afin de vérifier que l'on n'ait pas de phénomènes parasites tels que la flexion lors de l'essai en traction, ou même lors du serrage des mors hydrauliques.

Le type de montage réalisé est un pont de Wheatstone en quart de pont. La variation relative de la résistance de chaque jauge de déformation est proportionnelle à la déformation relative dans la direction de grille de cette jauge. Après corrections du facteur de jauge et de la déformation apparente en fonction de la température, l'appareil donne di-

rectement les déformations à multiplier par le calibre choisi. C'est pourquoi il est nécessaire de choisir des jauges qui non seulement permettent une utilisation à température élevée et des colles de fixation appropriées.

A ce titre, les effets parasites d'origine thermique, tant des mesures du module d'Young que du coefficient de Poisson sont nombreux. Lorsqu'une jauge est collée sur l'éprouvette, en l'absence de contraintes, elle subit des effets propres ainsi que la dilatation du métal, qui localement n'est pas créatrice de contrainte. En fonction de la température, la résistance varie suivant une courbe propre au type de jauge et au métal sur lequel cette jauge est collée. L'idéal est évidemment de disposer d'une jauge autocompensée ayant une courbe pratiquement horizontale. Le but de l'autocompensation est d'éliminer autant que possible les effets thermiques des jauges, y compris la dilatation propre de l'éprouvette étudiée. Une jauge ne pouvant être compensée que pour une dilatation donnée, les jauges autocompensées sont réalisées par famille, fonction du coefficient de dilatation. Pour nos essais, on utilise alors une jauge compensée pour des alliages d'aluminium. L'utilisation de ce type de jauges est d'autant plus nécessaire lorsqu'il existe une incertitude de mesure de température de l'éprouvette.

Sur nos alliages Al-Sn, la conductibilité thermique est très importante. On a par conséquent de fortes dissipation de chaleur entre l'éprouvette et les mors en acier, eux mêmes directement reliés à la masse de l'appareillage. Il existe alors constamment un fort décalage de température entre celle mesurée sur l'échantillon et celle de l'enceinte thermique dont il faut absolument se méfier.

Il existe encore bien d'autres paramètres pouvant influencer sur les résultats. Il faut notamment citer les problèmes liés à la géométrie des éprouvettes. Il faut s'assurer, par exemple, d'un parfait parallélisme des faces entre elles, ceci pour éviter toute rotation de l'éprouvette dans les mors de la machine de traction.

De nombreux autres paramètres encore pourraient être cités influant directement sur les résultats tirés d'essais de traction en température. Nous en avons simplement cité quelques uns à l'intention d'utilisateurs futurs, tout en sachant que pour nous, l'apprentissage et la réalisation de ces mesure a nécessiter plus de six mois de travail.

### 1.5.2 Caractérisation thermique

Des éprouvettes d'alliages ont été soumises à des tests de mesure des propriétés thermiques. Ces essais ont été réalisés au Thermo-physical Property Measurement Laboratory

faisant partie du même groupe que Glacier-Vandervell. Nous avons prélevé des échantillons et fait réaliser des mesures pour évaluer la diffusivité thermique  $\beta$ , la chaleur spécifique  $C_p$ , et la densité  $\rho$  en fonction de la température. On détermine ensuite la conductibilité thermique  $\lambda$  d'après l'équation suivante :

$$\lambda = \beta C_p \rho \quad (1.70)$$

#### Diffusivité thermique :

La diffusivité thermique est déterminée par une méthode à illumination laser. On chauffe la face avant d'un échantillon circulaire par des excitations non focalisées et l'on mesure l'élévation de température résultante sur la face arrière en fonction du temps. L'analyse du rapport température/temps permet de déterminer la diffusivité thermique  $\beta$ . En tenant compte des conditions adiabatiques :

$$\beta = \frac{0,1388l^2}{t_{0,5}} \quad (1.71)$$

où  $\beta$  est la diffusivité thermique ( $\text{cm}^2/\text{s}$ ) ;  $l$  est l'épaisseur de l'échantillon (cm) ;  $t_{0,5}$  est le temps correspondant à une augmentation de 50 % de la température, mesurée à l'arrière de l'échantillon.

L'équipement utilisé est un appareillage à illumination laser Netzsch 427 (LFA), qui permet d'opérer entre la température ambiante et  $1300^\circ\text{C}$ , aussi bien dans le vide, dans l'air, ou en gaz inerte. Les échantillons ont ici été testés entre la température ambiante et  $220^\circ\text{C}$  environ. Ils ont été chauffés et refroidis à une vitesse de  $10^\circ\text{C}/\text{min}$  et les mesures ont été relevées par intervalles de  $50^\circ\text{C}$ , dans une atmosphère d'argon.

#### Chaleur spécifique

La chaleur spécifique est mesurée à l'aide d'un calorimètre différentiel à balayage Netzsch modèle 404. On suit à température croissante l'évolution de la différence de deux énergies, celle de l'échantillon à étudier et celle d'un étalon qui ne présente pas d'anomalie dans le domaine de température considéré. Cette différence d'énergie est due à une absorption ou un dégagement de chaleur qu'impose le matériau étudié lorsqu'il subit un changement de structure quand on fait varier sa température. La chaleur spécifique est obtenue par la formule suivante :

$$C_{p,e} = C_{p,std} \frac{m_{std}}{m_e} \frac{\Delta\mu V_e}{\Delta\mu V_{std}} \quad (1.72)$$

où  $C_{p,e}$  est la chaleur spécifique de l'échantillon ;  $C_{p,std}$  est la chaleur spécifique standard ;  $m_e$  est la masse de l'échantillon ;  $\Delta\mu V_e$  est le signal différentiel entre la ligne de base et la ligne de l'échantillon ;  $\Delta\mu V_{std}$  est le signal différentiel entre la ligne de base et la ligne standard.

La chaleur spécifique est mesurée pour une température variant de la température ambiante à 320°C environ, puis redescendue jusqu'à 135 °C.

### Dilatation thermique

Afin d'obtenir une grande sensibilité, la dilatation de l'échantillon est rapportée à celle d'un étalon qui possède une dilatation régulière et réversible, en tenant compte d'un facteur de correction éliminant l'influence du système expérimental sur les mesures :

$$\Delta L_e = \Delta L_{me} + (\Delta L_r - \Delta L_{mr}) \quad (1.73)$$

où  $\Delta L_e$  est l'allongement réel de l'échantillon ;  $\Delta L_{me}$  est l'allongement mesuré de l'échantillon ;  $\Delta L_r$  est l'allongement du matériau de référence selon les normes en vigueur ;  $\Delta L_{mr}$  est l'allongement mesuré du matériau de référence.

La dilatation thermique linéaire est mesurée entre la température ambiante jusqu'à une température de 200°C environ. Cette température est retenue pour éviter tout risque de contamination de la cellule de mesure du fait de la faible température de fusion de l'étain.

De même, la densité volumétrique en fonction de la température est obtenue à partir de la dilatation d'après la formule suivante :

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{L_0}{L} \right)^3 \quad (1.74)$$

où  $\rho$  est la densité, fonction de la température ( $\text{g/cm}^3$ ) ;  $\rho_0$  est la densité initiale ( $\text{g/cm}^3$ ) ;  $L_0$  est la longueur initiale du matériau (mm) ; et  $L$  est la longueur, dépendante de la température (mm).

### 1.5.3 Les prévisions des modèles

Nous rapporterons d'abord les prédictions des modèles théoriques des modèles présentés, puis nous les confronterons aux résultats expérimentaux

Il est tentant de proposer une extension du modèle et de Christensen et Lo à trois phases en s'inspirant des méthodes des bornes. Celles-ci peuvent être obtenues pour un matériau biphasé en disposant respectivement la phase *dure* en inclusion dans la phase *tendre* (borne inférieure), ou la phase *tendre* en inclusion dans la phase *dure* (borne supérieure), et ceci dans toute la gamme des fractions volumiques des deux phases. Il faut ici comprendre phase *dure* ou *tendre* les phases présentant les modules et coefficients mécaniques, thermomécaniques et thermiques les plus forts ou les plus faibles respectivement

On envisagera donc pour le modèle à trois phases et pour toute concentration :

- une borne inférieure (l'inclusion *dure* est entourée d'une coquille *tendre*) ;
- une borne supérieure (l'inclusion *tendre* est entourée d'une coquille *dure*).

Sans être en état de préciser le statut de *bornes* pour les estimations ainsi obtenues, nous nous attendons à ce que ces évaluations encadrent l'estimation autocohérente. De surcroît, nous pouvons préjuger que, dans le cas de nos matériaux biphasés dont les principales caractéristiques morphologiques viennent d'être formulées en termes d'*inclusion-matrice*, les modèles *supérieurs* soient plus adaptés au cas des fortes teneurs en aluminium (phase *dure*), et les modèles *inférieurs* à celui des fortes teneurs en étain (phase *tendre*).

Sur les figures suivantes sont tracés les *fuseaux* prévisionnels pour les modules d'Young à différentes températures (fig. 1.11, 1.12, 1.13, 1.14), de dilatation thermique (fig. 1.15), et de conductivité thermique (fig. 1.16) de la concentration en étain. Ces valeurs sont calculées à partir des modules et coefficients issus d'essais expérimentaux d'une part ou tirés de la littérature d'autre part, à l'aide des modèles suivants (A chaque modèle est attribué les abréviations **E** pour l'élasticité, **D** pour la dilatation thermique et **C** pour la conductibilité thermique suivant qu'ils soient adaptés ou non à la détermination des coefficients respectifs) :

- schéma autocohérent (situation de désordre parfait) (**E, D, C**) ;
- encadrements variationnels de Hashin et Shtrickman (**E, C**), ou de Rosen et Hashin (**D**) ;

- deux configurations du modèle de Kerner, Christensen et Lo (modèle supérieur en plaçant l'étain en inclusion et l'aluminium en matrice ; modèle inférieur en plaçant l'aluminium en inclusion et l'étain en matrice) (E, C) ;
- modèle à quatre phases\* (on utilisera pour cela le modèle proposé par Larrard et Le Roy et donc en plaçant l'étain en inclusion et en matrice, et l'aluminium en interphase ; on prendra alors  $V_{r,max} = 0,96$ ). Il ne nous est malheureusement pas possible de définir un second modèle par inversion des phases car nous ne pouvons donner de valeur à une concentration maximale de l'aluminium en inclusion dans une matrice d'étain ) (E, D, C).

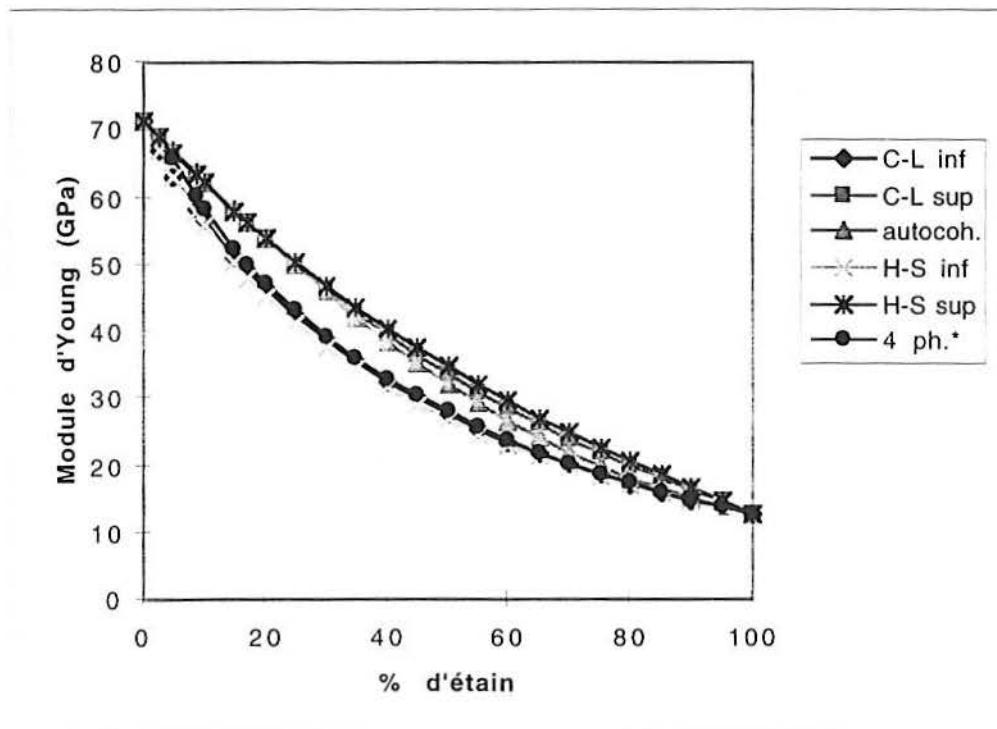


Figure (1.11) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain du composé binaire Al-Sn à 293°K



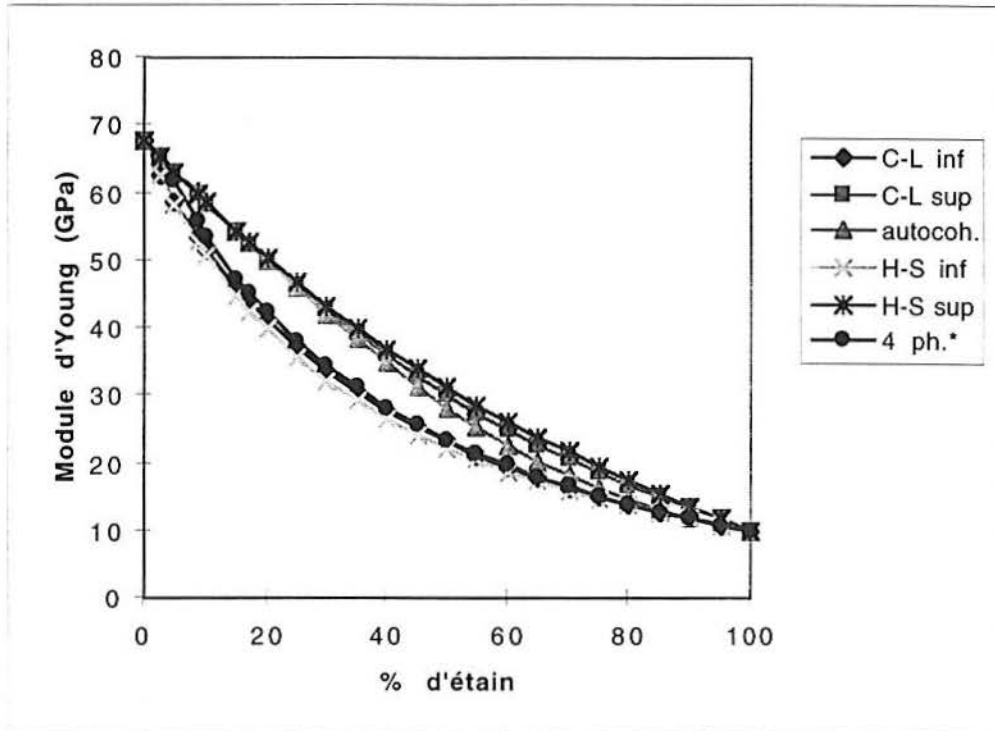


Figure (1.12) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain du composé binaire Al-Sn à 343°K

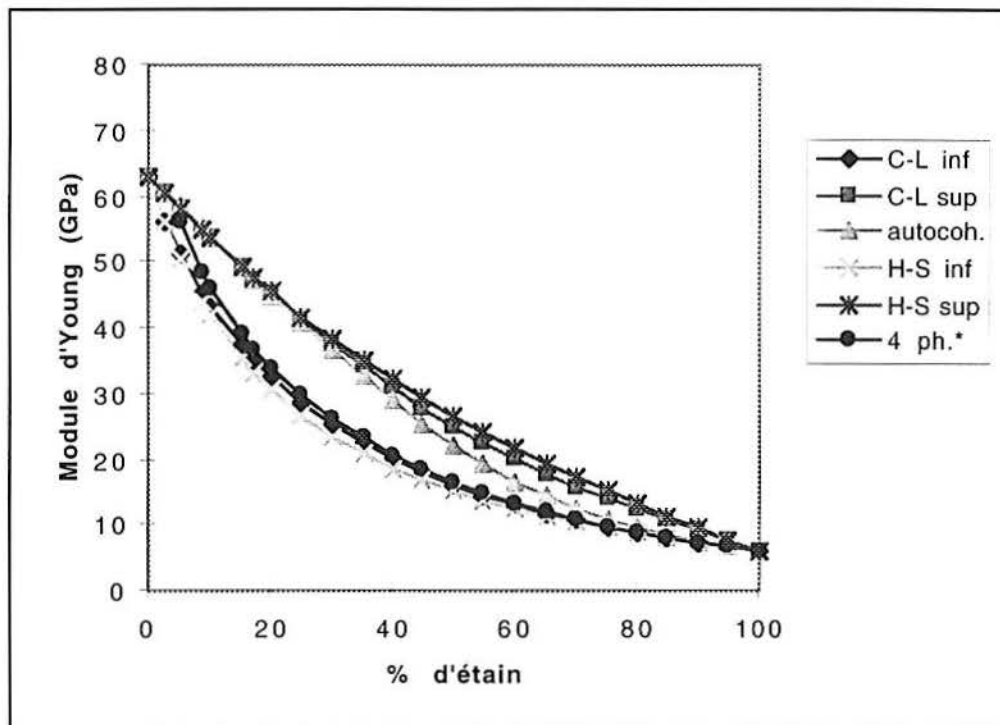


Figure (1.13) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain du composé binaire Al-Sn à 393°K



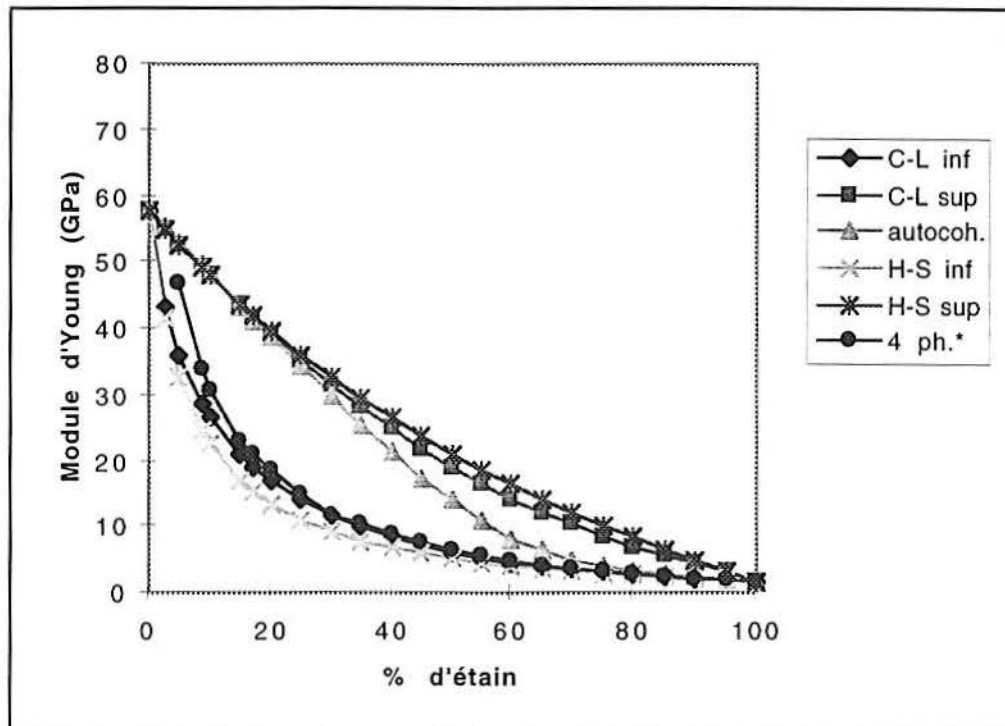


Figure (1.14) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain du composé binaire Al-Sn à 443°K

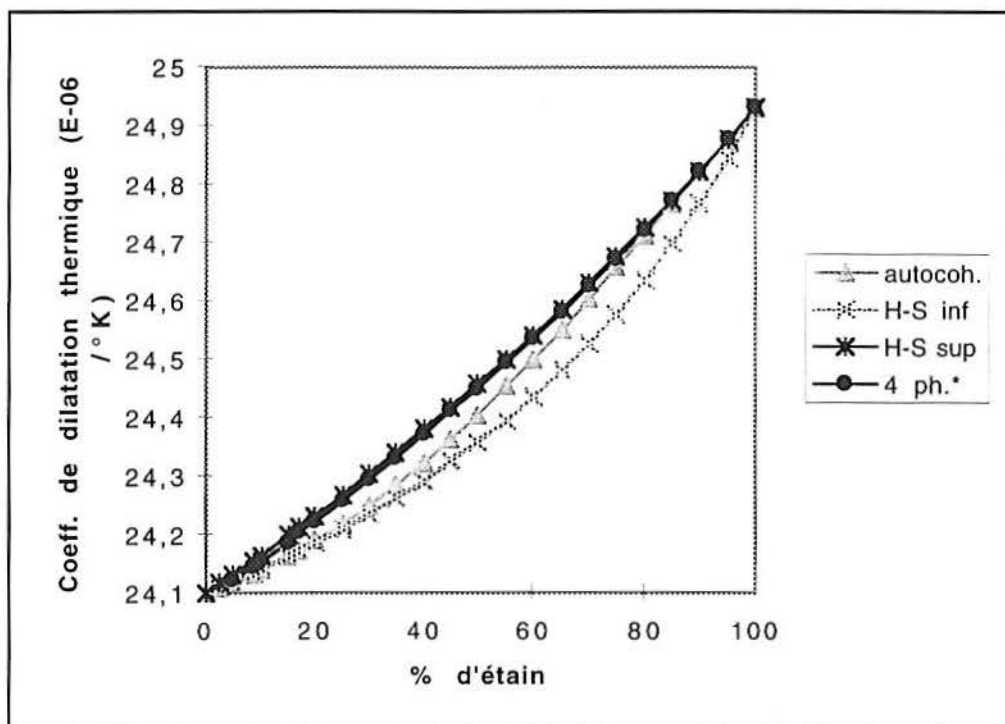


Figure (1.15) : Coefficient de dilatation thermique en fonction de la teneur en étain du composé binaire Al-Sn de 293°K à 493°K

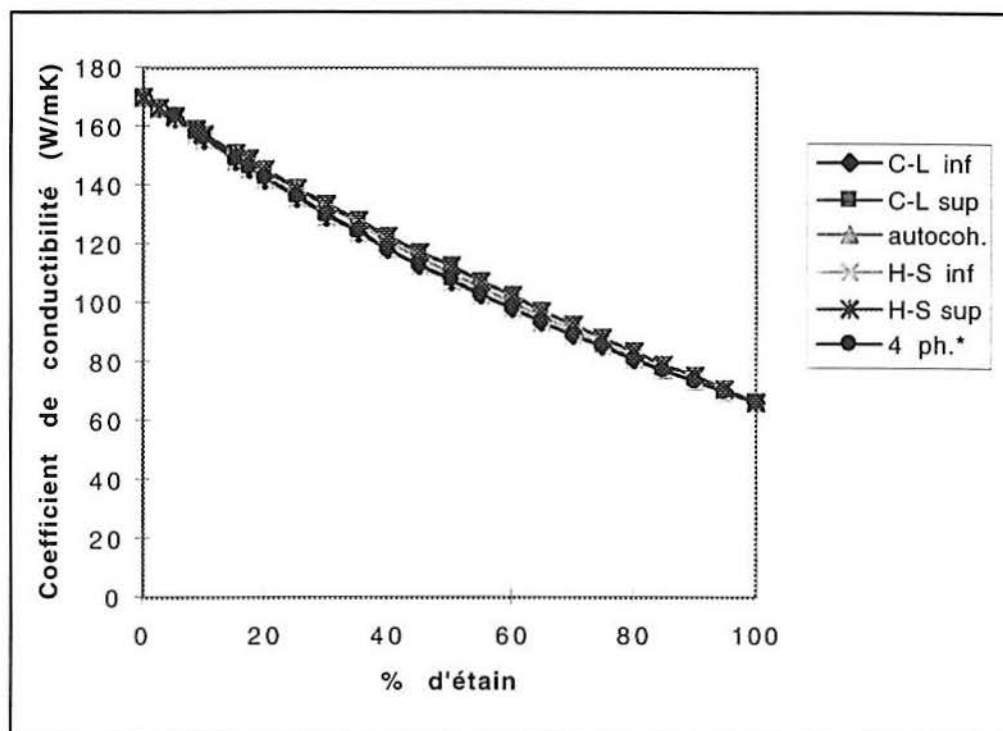


Figure (1.16) : Coefficient de conductibilité thermique en fonction de la teneur en étain du composé binaire Al-Sn à 293°K

Les courbes obtenues avec les modèles de Hashin-Shtrikman-borne inférieure et Christensen-borne inférieure pour la détermination du module d'Young (Fig. 1.11 à 1.14) se superposent et sont même identiques pour la détermination de la conductibilité thermique (Fig. 1.16). On retrouve la même similitude avec les modèles supérieurs correspondants.

Le bon comportement du modèle à quatre phases\* par rapport aux autres modèles est à signaler. Celui-ci se situe toujours à l'intérieur des fuseaux pour le module de cisaillement. Il tend à se rapprocher des bornes supérieures lorsque  $V_r$  tend vers  $V_{r\ max}$  et à converger vers les bornes inférieures pour les faibles valeurs d'étain, soit pour les fortes valeurs en inclusions d'aluminium. Il faut souligner que ce modèle n'est valable que lorsque la concentration en étain est supérieure à 4%, ce qui correspond à une teneur en aluminium inférieure à  $V_{r\ max}$ .

Enfin la courbe du modèle autocohérent se trouve bien à l'intérieur des deux fuseaux, quel que soit le module, étant donné que ce modèle correspond à une moyenne obtenue à partir des différentes configurations en prenant tour à tour chaque phase en inclusion. Cependant, cette courbe se rapproche des courbes des modèles supérieurs et de celui à quatre phases\* pour les faibles valeurs de concentrations en étain ; elle vient même tangenter les bornes supérieures pour une concentration tendant vers zéro. Inversement, à

forte concentration d'étain, la courbe du modèle autocohérent se rapproche des courbes des bornes inférieures. Mais l'écart entre le modèle autocohérent et les modèles supérieurs ou inférieurs reste appréciable à des concentrations intermédiaires.

Une vue, relativement simplifiée, mais assez naturelle des choses serait d'envisager qu'il existe trois domaines distincts d'homogénéisation :

- aux faibles teneurs en étain, les modèles supérieurs sont les plus pertinents de ceux que nous avons envisagé ;

- aux fortes teneurs en étain, ce sont les modèles *inférieurs* qui sont les mieux adaptés ;

- dans le domaine intermédiaire, si l'on considère une parfaite imbrication des phases l'une dans l'autre, on pourrait alors préférer le modèle autocohérent, attaché à une situation de désordre parfait, ou le modèle à quatre phases\*, dont l'évolution varie selon la valeur donnée à  $V_{rmax}$ .

Cependant, il serait bon de procéder à des expériences complémentaires pour garantir les conclusions précédentes.

## 1.6 Confrontation des résultats expérimentaux et théoriques

Nous rapporterons ici les résultats expérimentaux, puis nous les confronterons aux prédictions des modèles classiques de comportement effectif ; nous nous efforcerons de proposer diverses extensions de modélisation visant à une meilleure prise en compte des caractéristiques morphologiques de nos biphasés.

### 1.6.1 Confrontations des résultats mécaniques

Considérons maintenant, sur les figures (1.17), (1.18), (1.19) et (1.20), la superposition des points expérimentaux et des prévisions des modèles mécaniques pour le module d'Young aux températures d'essais de 293, 343, 393 et 443°K. Il apparaît que les barres des erreurs de mesures, bien que représentant de faibles incertitudes relatives, semblent grandes vis-à-vis des écarts entre les prévisions des différents modèles ; il faut donc être prudent quant aux interprétations. C'est pourquoi on ne dégagera de cette confrontation de résultats que des tendances.

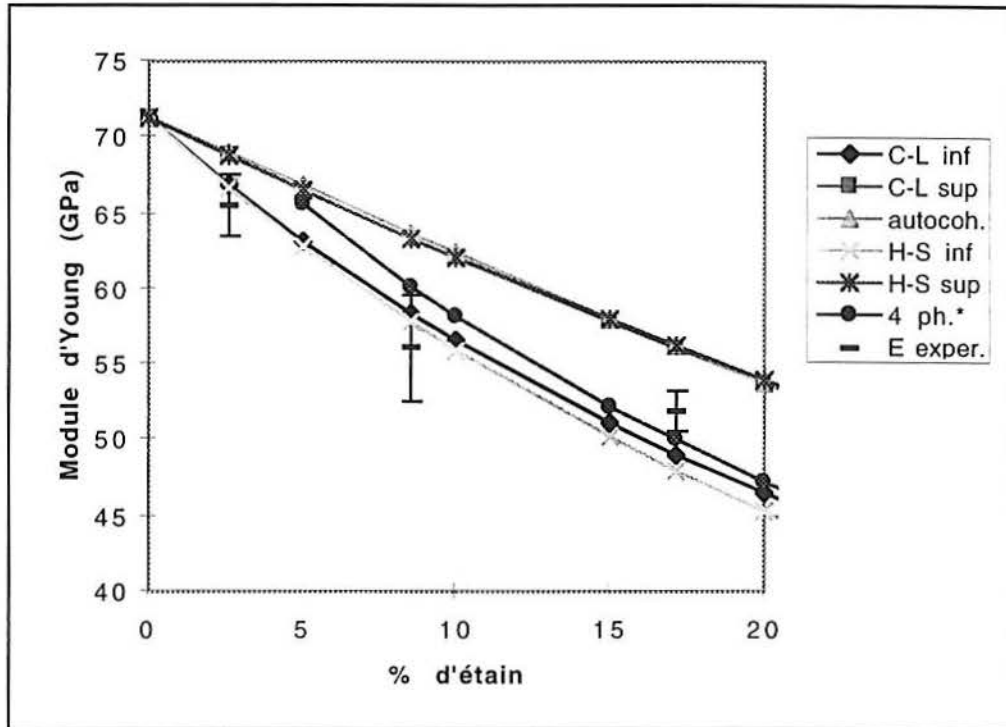


Figure (1.17) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain à 293°K  
Résultats expérimentaux et théoriques

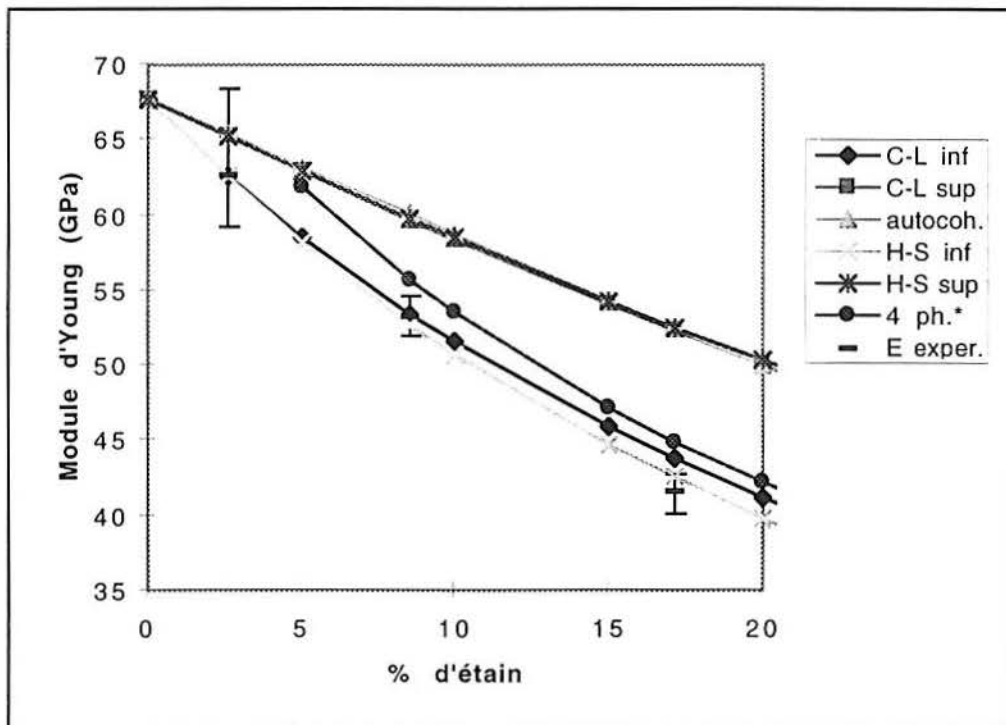


Figure (1.18) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain à 343°K  
Résultats expérimentaux et théoriques

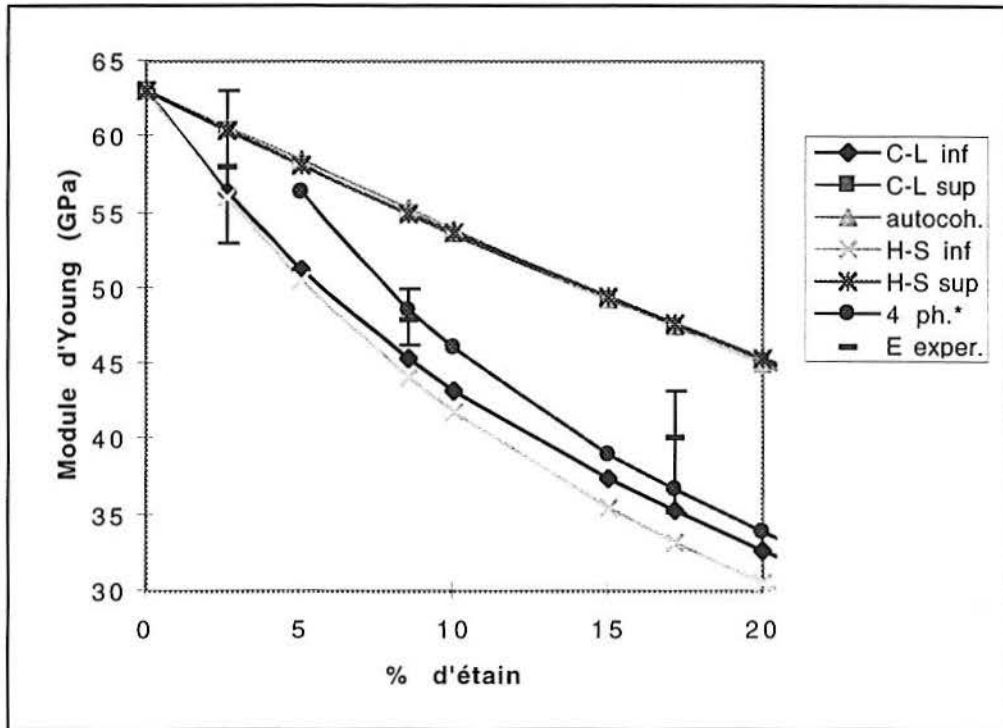


Figure (1.19) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain à 393°K  
Résultats expérimentaux et théoriques

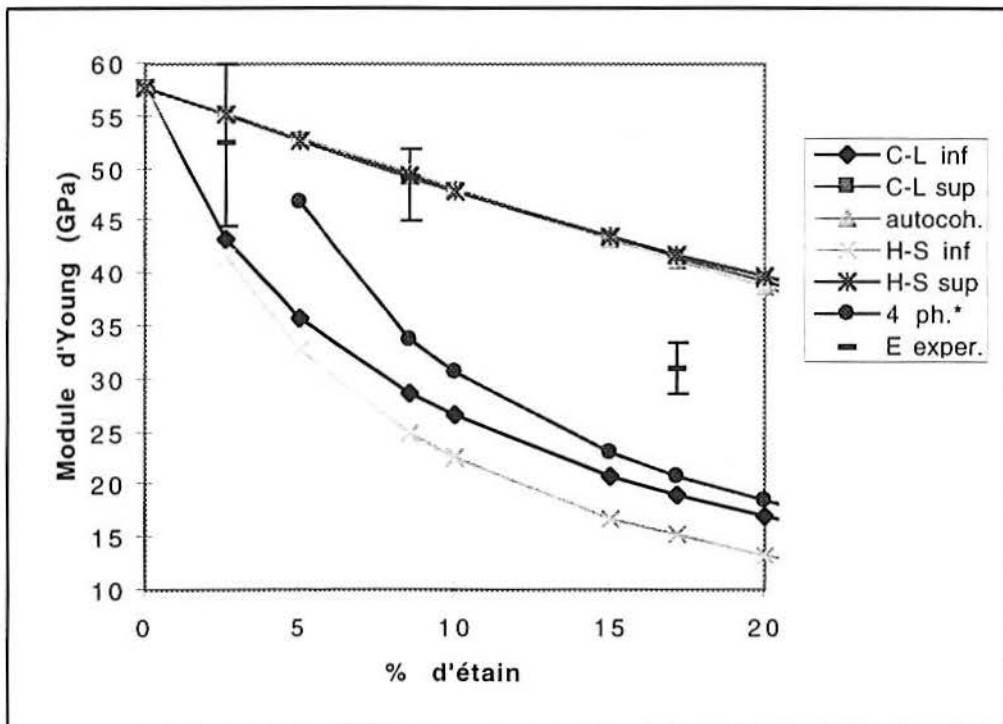


Figure (1.20) : Module d'Young en fonction de la teneur en étain à 443°K  
Résultats expérimentaux et théoriques

Les points expérimentaux se situent toujours sur les bornes inférieures aux basses températures et se trouvent à l'intérieur des faisceaux pour de fortes températures. Ces résultats obtenus pour des basses températures confirment le fait que l'étain a tendance à se comporter essentiellement en matrice, et cela même pour de très faibles concentrations. C'est donc l'étain qui conditionne principalement le comportement mécanique des alliages alors que l'aluminium joue de nouveau un rôle prépondérant lorsque l'on tend vers la température de fusion de l'étain. C'est ce qui justifie les fortes variations de modules vis à vis de ce qu'une simple loi des mélanges n'aurait pu mettre en évidence.

Mais si l'approche du comportement élastique de nos matériaux semble satisfaisante, il ne faut pas perdre de vue que les modèles utilisés ne correspondent qu'à des morphologies extrêmes du matériau, à savoir une phase prise en inclusion, totalement englobée à l'intérieur de la seconde phase considérée comme matrice, ou alors une situation de désordre parfait des deux phases comme dans le cas du modèle autocohérent. L'approche à quatre phases\* devient intéressante en ce sens qu'elle se positionne en situation intermédiaire par rapport aux configurations extrêmes des autres modèles.

Par ailleurs, les moyens de caractérisation morphologiques ne permettent pas de se faire une idée réelle de la géométrie de la structure, notamment en ce qui concerne la continuité des phases. Il serait donc illusoire de vouloir positionner les structures réelles vis-à-vis des configurations de chacun des modèles en se basant uniquement sur cette caractérisation morphologique. Toutefois, le recours à des renseignements extérieurs, provenant pour l'essentiel du mode d'élaboration, peut faciliter l'interprétation de la caractérisation morphologique.

### **1.6.2 Confrontations des résultats thermomécaniques et thermiques**

Voici présentés à leur tour les confrontations des résultats théoriques et expérimentaux obtenus en dilatation thermique (fig. 1.21) et pour la conduction thermique (fig. 1.22). Nous n'avons à présenter des résultats expérimentaux que pour le seul Sical 6 :

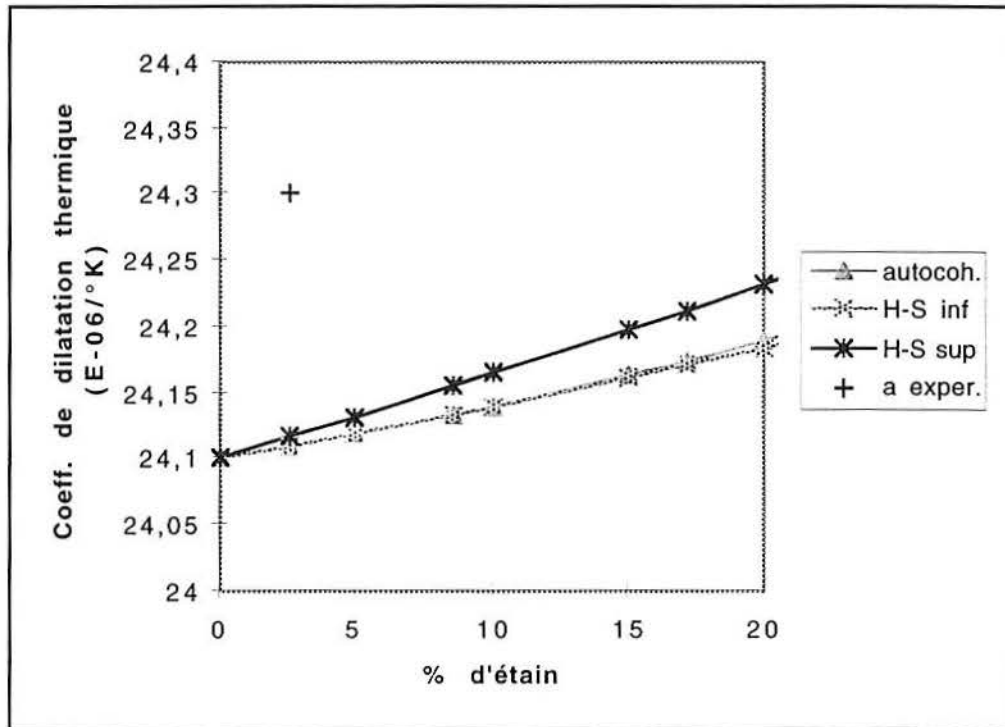


Figure (1.21) : Coeff. de dilatation thermique en fonction de la teneur en étain, de 293 à 493°K. Résultats expérimentaux et théoriques

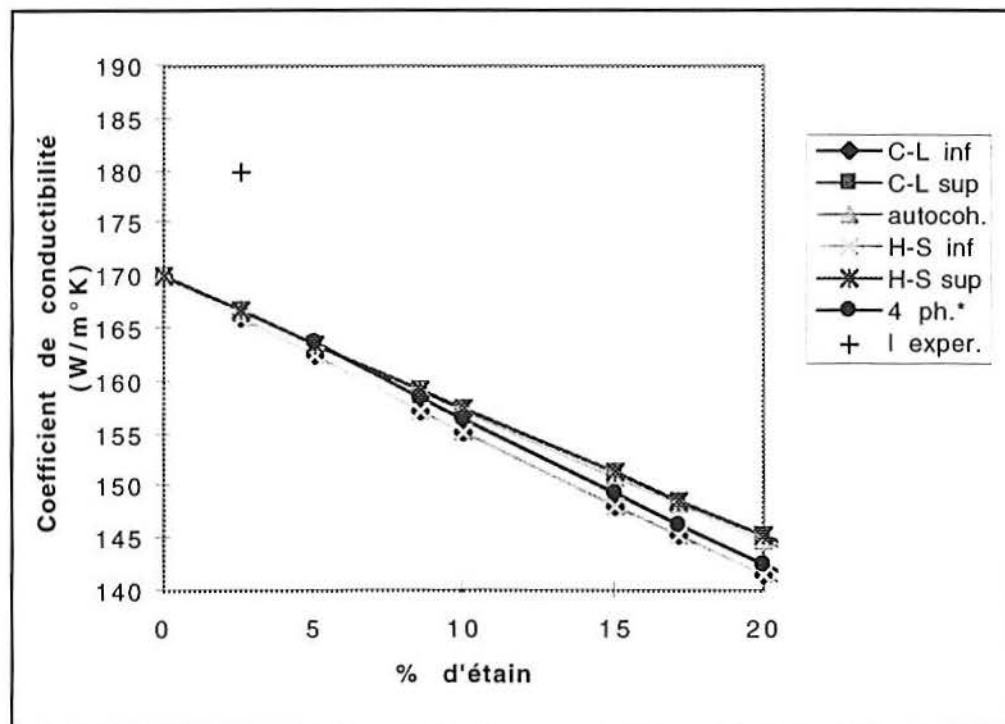


Figure (1.22) : Coeff. de conductibilité en fonction de la teneur en étain à 293°K. Résultats expérimentaux et théoriques

Les approches ici obtenues ne sont sans doute pas les plus réalistes car les valeurs initiales retenues pour les divers composants de nos alliages sont issues de la littérature et d'auteurs différents, ce qui nous permet de mettre en cause la « justesse » de ces valeurs, les modes et configurations des essais étant forcément différents. C'est pourquoi, à l'issue de ces considérations, il est délicat de tirer des conclusions sur ces approches quant à la prédiction des coefficients thermiques et thermomécaniques.

## 1.7 Bilan et conclusion

Les principaux résultats obtenus dans ce chapitre peuvent être regroupés sous deux familles. A savoir les résultats obtenus :

### - en termes d'homogénéisation

Nous avons réalisé au cours d'une première partie, une synthèse qui, sans se prétendre exhaustive, présente le savoir-faire actuel en homogénéisation à l'aide d'approches de type « milieu effectif ». Les principaux résultats sont les suivants :

- qu'il s'agisse des caractéristiques mécaniques, thermomécaniques ou thermiques, les prédictions des modèles d'encadrement des modules effectifs sont globalement similaires, et ce quelques soient les teneurs respectives des phases constitutives de l'alliage considéré ;

- seuls le modèle autocohérent de Budiansky et notre modèle original à quatre phases\* permettent de tenir compte d'une répartition géométrique particulière des phases au sein du matériau, à savoir une alternance des rôles de matrice et d'inclusion, mais qui n'est pas forcément la distribution réelle existante dans ce type d'alliage. De ce fait, l'utilisation de modèles écrits pour des matériaux composites pour la caractérisation d'alliage de ce type ne doit donc pas se faire sans précautions préalables ;

### - en termes de corrélations calculs / mesures

Pour le problème de la caractérisation mécanique de ce type d'alliage, nous préconisons l'utilisation des modèles proposant un encadrement des modules effectifs car ils présentent deux variantes de résultats possibles, selon que l'on retienne telle ou telle configuration matrice-inclusion. Le modèle variationnel de Hashin-Shtrikman et les deux



configurations de l'approche autocohérente du modèle à trois phases de Christensen-Lo sont de notre point de vue les mieux appropriés. En effet, l'analyse des résultats a permis de mettre en évidence deux tendances particulières du comportement de l'alliage Al-Sn selon que l'on travaille à faible ou à haute température :

- à froid, la tendance filmogène de l'étain lui fait jouer essentiellement un rôle de matrice et ce rôle conditionne le comportement mécanique de l'alliage, bien que la teneur de cette phase soit très faible. Dans cette situation, ce sont alors les bornes inférieures des modèles de Hashin-Shtrikman et de Christensen-Lo qui approchent au mieux les caractéristiques des matériaux ;

- à chaud, pour des températures supérieures à la température d'huile au niveau pallier - bielle, l'aluminium assure seul le comportement mécanique de l'alliage. Le point de fusion excessivement faible de l'étain (232°C) rend ce matériau particulièrement ductile à de hautes températures, ce qui a pour effet réduire fortement sa tenue mécanique. Dans ce cas l'aluminium joue alors un rôle de matrice, et les bornes supérieures des modèles précédents deviennent les plus pertinentes.

En ce qui concerne les prédictions de l'ensemble des modèles présentés pour la caractérisation des constantes thermiques, elles restent éloignées des valeurs expérimentales à notre disposition. Toutefois il est difficile d'imputer ces mauvaises corrélations aux seules prédictions des modèles car nous n'avons pas disposé suffisamment de valeurs expérimentales pour valider ou contre valider ces approches.

NOTA : La Société Glacier Vandervell pourrait obtenir un raffinement possible des caractérisations mécaniques, thermomécaniques ou thermiques en réalisant une étude statistique par analyse d'images de l'hétérogénéité moyenne à considérer dans ce matériau biphasique.

### **Recommandations**

La tendance de l'étain à modifier l'élasticité de l'alliage antifriction en fonction de son caractère filmogène constitue pour le fabricant un nouvel aspect du comportement de ce type d'alliages :

- lors de la mise en forme du coussinet, le fabricant pourra rendre le matériau antifriction plus conformable ou non, accroissant ainsi pour une déformation donnée les sollicitations dans le support acier ;

- pour traiter les problèmes d'arc-boutement d'arbres sur le coussinet. En effet, ceux-ci génèrent des pressions de contact importantes qui pourront être réduites si le coussinet est plus élastique, et donc plus conformable.



# Chapitre 2

## Etude du coussinet dans son berceau

### 2.1 Introduction

Il s'agit ici de caractériser le frottement d'un coussinet multicouche lorsque celui-ci est monté dans une coquille de contrôle de longueur développée. L'utilisation de cette coquille est un moyen simple et sûr de contrôler la longueur du coussinet (procédé utilisé en fabrication). Connexe au travail déjà réalisé, ce thème d'étude fait intervenir la réponse élastique du coussinet avec en particulier celle de l'antifriction et le contact avec frottement, sujet nouveau pour nous.

Peu d'articles traitent en réalité de la mesure de la longueur développée d'un coussinet dans son logement. Nous avons relevé surtout les travaux de Matzelle [44], qui s'intéresse à la détermination des déformations au sein du coussinet et qui présentent des techniques de mesures adaptées. Il est à regretter cependant que, dans le cadre de ses travaux, il ne prenne pas en compte le problème lié au frottement, en considérant pour ses analyses uniquement un contact parfaitement lisse entre le coussinet et son berceau.

Pour notre part, nous nous intéressons dans un premier temps au frottement inhérent à ce type de problème, cherchant à appréhender la valeur et l'influence du frottement. La mise en contact du coussinet et du logement crée une interface frottante de type Coulomb. Le test permettant de caractériser au mieux le coefficient de friction de Coulomb consiste à réaliser un montage par compression progressive du plan de joint du coussinet et de faire

des mesures régulières de déplacements lors de sa charge, montage envisagé pour notre étude avec l'aide de Glacier-Vandervell comme prévu (Cf. figure 2.14).

Les calculs de structure afférents, pour la simulation de l'opération de contrôle, sont réalisés à l'aide du code éléments finis industriel Systus de Framasoft, ainsi qu'avec notre technique spécifique au cas de l'interface de Tresca, cas particulier de celui de Coulomb. Le problème étudié faisant intervenir un phénomène irréversible, le frottement, l'indépendance du résultat par rapport au trajet de chargement n'est pas garantie ; de ce fait la sensibilité à l'algorithme numérique utilisé doit être contrôlée rigoureusement, d'où le double traitement par Systus et notre technique pour l'interface de Tresca, et passage ensuite au cas de Coulomb (et loi d'écoulement non associée) avec Systus seul.

## 2.2 Contact et frottement

Le frottement est un phénomène essentiel dès que l'on étudie des systèmes mécaniques composés de plusieurs pièces en contact. L'impénétrabilité réciproque de ces pièces se traduit dans le calcul par des inégalités sur les paramètres qui repèrent à chaque instant l'état du système ; une liaison unilatérale comprend l'impénétrabilité. Cette notion, plus délicate à manipuler que les liaisons classiques, permet d'aborder des problèmes plus réalistes où on ne connaît pas à priori, même par une analyse sommaire, les zones de contact effectif à chaque instant. Même dans des cas très simples, la région de contact effectif peut ne pas être aisément identifiable.

La loi de contact unilatérale fait intervenir la force normale de contact et la distance. Aux relations d'impénétrabilité (distance normale de contact  $d_n \geq 0$ ) et de non adhésion (« force de contact »  $\lambda_n$  positives ou nulles en compression), il convient d'en ajouter une troisième,  $\lambda_n d_n = 0$ , qui signifie que les deux variables ne peuvent pas être simultanément différentes de zéro. Ce type de condition, dite de complémentarité, est à l'origine de la non linéarité du problème mécanique.

Qu'il soit combattu ou recherché, le frottement est un phénomène physique lié au contact. La notion de frottement sec de Coulomb ou de Tresca par la donnée d'un seul coefficient ne rend compte qu'imparfaitement de la complexité réelle d'un phénomène mal défini, dépendant de facteurs plus ou moins mesurables (rugosité, température, débris d'usure...). Cependant elle permet de simuler correctement nombre de situations concrètes avec une information minimale mais suffisante.

Plusieurs études ont déjà été réalisées dans ce domaine, qui utilisent différents algorithmes de résolution du problème du contact avec ou sans frottement. On citera ici les travaux de

Curnier et Alart [45] qui utilisent une méthode de pénalité pour imposer les conditions de contact et d'adhérence, de projection implicite pour intégrer la loi de glissement, ainsi qu'une méthode de Newton généralisée pour résoudre les non-linéarités. Raous, Chabrand et Lebon [46] présentent aussi plusieurs méthodes pour le contact telles qu'une relaxation avec projection et une approche par programmation linéaire adaptée, mais aussi une méthode par point fixe sur conditions aux limites par pénalisation. Plus proches de la modélisation que nous avons retenue, les travaux de Johnson et Quigley [47], de Klarbring et al [48,49] concernant les contacts élastiques, mais aussi Zhu [50] pour le contact élastoplastique, ramènent l'évolution des déplacements et des forces de contact à un problème de complémentarité linéaire paramétré.

## 2.3 Contact unilatéral

### 2.3.1 Problème de Signorini

Deux corps sont en contact s'ils ont une frontière commune. Tant qu'ils restent en contact, les deux solides peuvent glisser tangentiellement le long de leur surface de contact et peuvent être dissociés l'un de l'autre en exerçant une simple poussée sur l'un des solides.

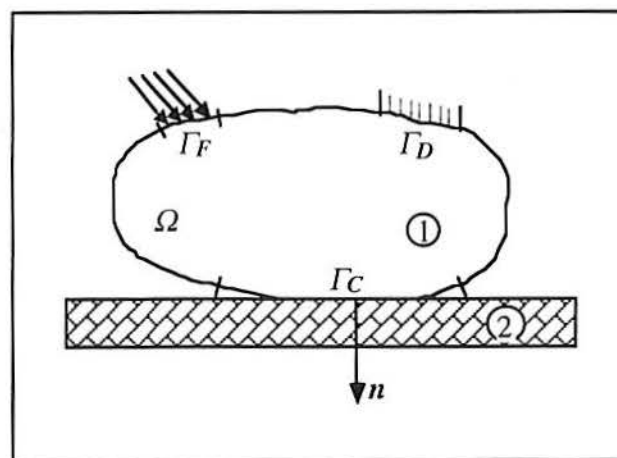


Figure 2.1 : Corps élastique en contact avec un obstacle rigide.

Soit un solide occupant le domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  suffisamment régulière décomposée en  $\Gamma_F \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C$  où :

- $\Gamma_C$  est la zone initiale de contact du solide avec l'obstacle,
- $\Gamma_D$  est la zone de la frontière  $\Gamma$  où les déplacements sont imposés,

-  $\Gamma_F$  est la zone où sont appliqués les efforts extérieurs.

L'écriture de la condition de non pénétration d'un solide déformable en contact avec un obstacle rigide en termes de complémentarité [51], est due à Signorini (1933).

On décompose sur le bord  $\Gamma_C$  le déplacement du solide mobile (1) et les forces de contact sur le même solide de la part de (2) en composantes normales et tangentielles :

$$\begin{cases} u = u_N n + u_T t \\ F = F_N n + F_T t \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $u_N$  et  $F_N$  sont des mesures algébriques suivant la direction de la normale extérieure  $n$  à  $\Gamma_C$  au point de contact, et  $u_T$  et  $F_T$  sont des mesures algébriques suivant la direction tangente à la surface de contact  $t$ . Les conditions de contact unilatéral s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u_N \leq 0 \\ F_N \leq 0 \\ u_N F_N = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Ces relations caractérisent bien le contact unilatéral, à savoir :

- On a bien non pénétration du solide dans l'obstacle rigide ( $u_N \leq 0$ )
- La force normale exercée par l'obstacle (considéré comme indéformable) sur le solide mobile est une compression ( $F_N < 0$ ),
- La relation de complémentarité  $u_N F_N = 0$  décrit bien les deux situations possibles

1. contact établi ( $u_N = 0$ ), la force normale est active ( $F_N \leq 0$ ),
2. décollement ( $u_N < 0$ ), la force doit être nulle ( $F_N = 0$ ).

Dans un cas plus général, on définit  $\Gamma_C$  comme la zone susceptible de venir en contact avec l'obstacle. Le contact pourra alors s'étendre à une zone plus (ou moins) grande que la surface de contact initiale. On remplace alors la condition  $u_N \leq 0$  par la condition  $u_N \leq d$  où  $d$  représente la distance initiale du solide à l'obstacle. Il n'y aura pas d'ambiguïté pour définir cette distance sous l'hypothèse des petits déplacements.

### 2.3.2 Lois de frottement

#### Le frottement de Tresca

C'est une loi de frottement à seuil fixe (donné)  $g$ . Elle porte ce nom par analogie avec le critère de Tresca en plasticité. Elle s'écrit :

$$\begin{cases} |F_T| \leq g \text{ avec} \\ \text{si } |F_T| < g \text{ alors } \dot{u}_T = 0 \\ \text{si } |F_T| = g \text{ alors } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \dot{u}_T = -\lambda F_T, \dot{u}_N = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

D'un point de vue mécanique, le fait que la limite de glissement ne dépende pas de la contrainte normale est limitatif. Toutefois, dans les cas où cette contrainte normale est assez bien connue a priori, cette forme pourra être utile. Ce sera par exemple le cas pour les problèmes de remplissage de moule par injection sous pression à chaud ; la force normale sur la paroi est alors voisine de la pression d'injection et  $g$  pourra donc être choisi comme étant une fonction de cette pression d'injection.

Il faut noter qu'une loi de Tresca ne pourra pas être simplement couplée avec un modèle de contact unilatéral car il faudrait imposer  $g = 0$  sur la partie décollée et cette dernière est l'une des inconnues du problème unilatéral.

#### Le frottement de Coulomb

C'est la plus ancienne et la plus connue des lois de frottement. Elle possède les deux ingrédients de base : la notion de seuil et la seule dépendance à la contrainte normale. Les premières notions ont été introduites par Amontons en 1699 [52] avant que Coulomb ne publie son fameux mémoire en 1785 [53]. Cette loi s'écrit :

$$\begin{cases} |F_T| \leq \mu |F_N| \text{ avec} \\ \text{si } |F_T| < \mu |F_N| \text{ alors } \dot{u}_T = 0 \\ \text{si } |F_T| = \mu |F_N| \text{ alors } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \dot{u}_T = -\lambda F_T, \dot{u}_N = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

C'est une loi non associée puisque l'écoulement ne se fait pas suivant la règle de normalité, le glissement étant tangentiel. Cette propriété complique sérieusement le modèle.

### Autres lois de frottement

Il existe un grand nombre de variantes de la loi de Coulomb. On peut citer les lois à seuil de Coulomb modifié développées en particulier pour des problèmes d'emboutissage. Elles s'écrivent sous la forme générale précédente (2.4) avec des choix particuliers pour la fonction seuil  $f$  :

- **Loi de Coulomb-Orowan** [51] : c'est une loi de Coulomb où l'effort tangentiel maximum est limité par la contrainte tangentielle d'écoulement  $k$  du matériau :

$$f = \min(\mu|F_N|, k) \quad (2.5)$$

- **Loi de Shaw** : Il s'agit d'un modèle qui fait appel aux aspects tribologiques du contact en tenant compte de l'évolution de la surface réelle de contact à l'échelle de quelques dizaines de microns. Le contact se fera d'abord sur les sommets des aspérités et la surface réelle de contact va donc évoluer en fonction de la charge normale. Le modèle de Shaw permet de tenir compte de cette évolution en définissant le seuil de glissement de la manière suivante :

$$f = \alpha k \text{ avec } \alpha = \frac{\Gamma_R}{\Gamma_C} \quad (2.6)$$

où  $\Gamma_R$  est la surface nominale (effective) de contact. On calcule son évolution à l'aide d'un modèle cinématique local des zones déformées au cours du chargement.

#### 2.3.3 Equations du problème de contact avec frottement

Sous l'hypothèse des petites perturbations, le problème mécanique ( $P_c$ ) appelé problème de Signorini avec frottement de Coulomb, consiste à trouver le champ des déplacements  $u$  tel que les relations suivantes soient vérifiées :

- la loi de comportement élastique et les équations d'équilibre sur  $\Omega$



$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} = K_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \sigma_{i,j} = -\Phi_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

- les conditions aux limites sur  $\Gamma_D$

$$\begin{cases} u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \forall i \\ \sigma_{ij}n_j = \Phi_2 \text{ sur } \Gamma_F \end{cases} \quad (2.8)$$

- les relations de contact unilatéral et de frottement sur  $\Gamma_C$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}n_j = F_i \\ u_N \leq 0 \\ F_N \leq 0 \\ u_N F_N = 0 \\ |F_T| \leq m|F_N| \\ \text{avec si } |F_T| < m|F_N| \text{ alors } u_T = 0 \\ \text{si } |F_T| = m|F_N| \text{ alors } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } u_T = -\lambda F_T \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\Phi_1$  est une densité volumique de force donnée dans  $\Omega$ ,  $\Phi_2$  est la densité surfacique de force donnée sur  $\Gamma_D$ .

### Forme variationnelle

On se place sous des hypothèses de régularité suffisante pour les fonctions considérées. Nous introduisons le convexe  $C$  qui sera l'espace des déplacements admissibles, c'est-à-dire compatibles avec les liaisons (conditions aux limites et conditions unilatérales) et tels que leurs différentes dérivées soient définies :

$$C = \{v \in U \mid v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\} \quad (2.10)$$

avec  $U = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$

On note ici  $v$  le vecteur  $(v_i)$  par souci de clarté.

En posant pour alléger l'écriture  $u = (u_i)$ , la forme variationnelle du problème (Pc) s'écrit alors sous la forme d'une inéquation variationnelle implicite :

$$\begin{aligned} \text{trouver } u \in C \text{ tel que } & a(u, v - u) + J_1(u, v) - J_1(u, u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in C \\ \text{avec } & a(u, v) = \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \quad u, v \in U \\ & L(v) = \int_{\Omega} \Phi_1 v dV + \int_{\Gamma_f} \Phi_2 v dS, \quad v \in U \\ & J_1(u, v) = \int_{\Gamma_c} \mu |F_N(u)| |v_T| dS \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $v_T$  est le projeté du vecteur déplacement au point  $\Gamma_c$  sur le plan tangent. L'introduction de contact unilatéral et du frottement transforme donc le problème classique d'équations variationnelles d'un problème élastique :

$$\text{trouver } u \in U \text{ tel que } a(u, v - u) = L(v - u) \quad \forall v \in U \quad (2.12)$$

en inéquations variationnelles.

On remarquera l'apparition d'un terme non différentiable correspondant au travail de la force de frottement critique, puisque l'effort de frottement et le déplacement tangentiel sont colinéaires et que, si le déplacement est non nul, l'effort de contact est égal à  $\mu |F_N(v)|$ .

### Association d'un problème de minimum

La formulation (2.11) sous forme d'inéquations variationnelles du problème de contact avec frottement ne permet pas d'associer directement un problème de minimum au problème (Pc) en raison du terme non différentiable. On définit alors un nouveau problème, nommé problème de point fixe sur le seuil de glissement. A chaque étape de ce point fixe, nous aurons à résoudre un problème de frottement à seuil fixé (c'est-à-dire un problème de Tresca). Ce problème de Tresca à seuil de frottement  $g$  fixe mais sans décollement normal conduit alors à une inéquation variationnelle (sans caractère implicite) et un principe de minimum peut lui être associé. Pour ce problème il s'agit de trouver le point fixe de l'application  $S$  :

$$S(g) = -\mu F_N(u^g) \text{ pour } g \in \Gamma \quad (2.13)$$

où  $u^g$  est la solution du problème suivant pour lequel  $g$  est donné :

$$\begin{aligned} \text{trouver } u^g \in C \text{ tel que : } & a(u^g, v - u^g) + j(v) - j(u^g) \geq L(v - u^g) \quad \forall v_i \in C \\ \text{avec } & j(v) = \int_{\Gamma_c} g |v_T| ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

Grâce aux propriétés de la forme bilinéaire  $a(u, v)$ , le problème précédent se ramène à une minimisation sous contrainte d'une fonctionnelle contenant une partie quadratique et une partie non différentiable. Le problème (2.14) est équivalent au problème suivant :  $u^g \in C$  tel que :

$$\begin{aligned} \text{trouver } u^g \in C \text{ tel que : } & J(u^g) \leq J(v) \quad \forall v \in C \\ \text{avec } & J(v) = \frac{1}{2} a(u, v) + j(v) - L(v) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ce problème sera résolu directement avec un code approprié.

## 2.4 Approche élastique-plastique du contact

Notre étude pour le cas de Tresca, appliquée au comportement d'un coussinet semi-circulaire dans un substratum rigide avec friction, est basée sur un travail réalisé au sein du laboratoire sur une modélisation du contact entre matériaux élastiques (Disdier, Loute et Pastor [54], et Disdier [55]), dans le but de prédire l'évolution de la force de traction simple à exercer sur un matériau composite unidirectionnel chargé dans le plan perpendiculaire à l'axe des fibres. Nous en rappelons ici le principe :

On considère un solide de volume  $\Omega$  formé de deux parties élastiques référencées 1 et 2 en contact le long d'une surface  $\Gamma_{1,2}$ . Cette surface est définie comme la limite d'une zone mince de manière analogue à celle utilisée pour la définition des discontinuités de vitesse en analyse limite. Par suite les variables mécaniques associées sont le vecteur contrainte sur la facette tangente à  $\Gamma_{1,2}$  et le vecteur discontinuité de déplacement correspondant  $[v] = v_2 - v_1$  du fait de la convention choisie des contraintes positives en traction. Le do-

maine de Tresca tronqué en traction (Fig. 2.2) des vecteurs contraintes admissibles sur une facette de contact et le principe de travail maximal de Hill définissent la loi de contact. La désolidarisation des deux massifs élastiques est alors possible dès que l'extrémité du vecteur contrainte atteint la frontière du domaine  $D$ , puisque dans le cas présent les deux matériaux adjacents au contact ont un comportement élastique linéaire. Du fait de ces hypothèses la discontinuité de déplacement sous la forme suivante :

$$[v] = \lambda_i e_i \quad \lambda_i \geq 0 \quad (2.16)$$

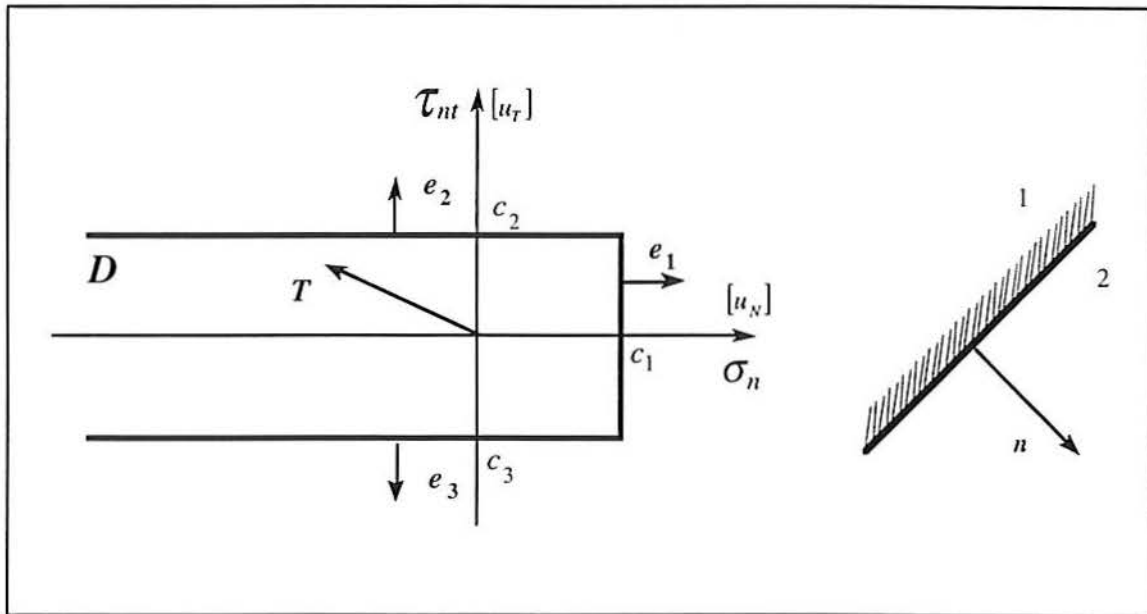


Figure 2.2 : Domaine  $D$  des contraintes admissibles avant décollement

Dans les massifs élastiques, le champ de déplacement solution doit vérifier les équations d'équilibre ainsi que la loi de comportement élastique linéaire en petites déformations.

Considérons dans un premier temps le cas purement élastique, sans zone de contact plastique. En définissant [56] l'ensemble  $U_{ad}$  des déplacements admissibles, on montre classiquement que la formulation variationnelle de ce problème est équivalente [57] à la minimisation de la fonction énergie potentielle de déformation  $I(v)$ . Le champ de déplacement solution minimise  $I(v)$ , d'où finalement le problème suivant :

trouver  $u \in C$  tel que  $I(v) \geq I(u)$

$$\begin{aligned} \text{avec } I(v) &= \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx \\ L(v) &= \int_{\Omega} f_i v_i dV + \int_{\Gamma_{\sigma}} F_i v_i dS \\ a_{ijkl} &: \text{composantes du tenseur de rigidité élastique} \\ f_i \text{ et } F_i &: \text{densités de forces de volume et de surface} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pour tenir compte de l'existence de la zone de contact plastique entre les deux massifs élastiques, l'expression de l'énergie potentielle élastique de déformation est augmentée de celle de l'énergie plastique  $W(\lambda)$ . Celle-ci est l'intégrale sur  $\Gamma_{1,2}$  de la puissance dissipée unitaire obtenue [58] en minimisant  $c_i \lambda_i$  sur l'ensemble des  $\lambda_i$  satisfaisant (2.16). A ce stade, on postule que le champ de déplacement solution minimise, en respectant les conditions (2.16), la fonctionnelle « énergie totale »  $J(v, \lambda)$  définie comme :

$$J(v, \lambda) = I(v) + \int_{\Gamma} \lambda_i c_i dS \quad (2.18)$$

La formulation par la méthode des éléments finis de ce problème est alors obtenue en utilisant des éléments triangulaires à trois noeuds, à l'intérieur desquels les déplacements varient linéairement (Lagrange P1), les noeuds situés sur la frontière  $\Gamma$  entre les deux massifs élastiques étant dédoublés.

Les vecteurs discontinuité de déplacement, définis dans le repère local tangent à la ligne de discontinuité, sont exprimés dans le repère global. On regroupe ensuite tous les multiplicateurs plastiques dans un même vecteur  $\Lambda$  et les matrices de changement de repère dans la matrice  $\beta$ . La discrétisation de la partie fonctionnelle  $J(v, \lambda)$  relative aux massifs élastiques s'obtient en assemblant classiquement les matrices de raideur élémentaires dans  $K$  et en introduisant le vecteur  $p$  des forces nodales. Quant à l'énergie plastique, sa formulation matricielle est obtenue en assemblant dans le vecteur  $p'$  les termes relatifs au calcul de l'énergie dissipée le long de l'interface  $\Gamma_{1,2}$ . Finalement, en regroupant les égalités traduisant les conditions d'admissibilité plastique sur chaque segment d'interface et les conditions aux limites, la forme discrétisée devient le problème quadratique suivant :

$$\begin{cases} \beta v + E\Lambda = z \\ \text{minimiser } \frac{1}{2} {}^t v K v - {}^t p v + {}^t p' \Lambda \end{cases} \quad (2.19)$$

où  $z$  est un vecteur constant.

En introduisant le vecteur  $X$ , résultant de l'association du vecteur des déplacements nodaux et de celui des multiplicateurs plastiques affectés aux extrémités de chaque segment de discontinuité, le problème (2.19) devient :

$$\begin{cases} A = Xb \\ \text{minimiser } J(X) = \frac{1}{2} {}^t X K_m X + {}^t p'' X \quad \text{avec } p'' = \begin{pmatrix} -p \\ p' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.20)$$

où la matrice de rigidité élastique globale  $K$  est complétée avec autant de lignes et de colonnes nulles que nécessaire ( $K \rightarrow K_m$ ).

Le problème du contact étant ainsi formulé, il reste maintenant à résoudre le quadratique résultant. Deux solutions sont proposées. Il est possible de ramener le tout à un problème de programmation linéaire complémentaire (PLC) en utilisant l'algorithme de Wolfe [59], ou bien de résoudre directement le problème sous sa forme quadratique initiale.

L'application de l'algorithme de P. Wolfe [59] nécessite un changement de variables sur les composantes du vecteur déplacement, afin que toutes les composantes du vecteur  $X$  deviennent positives ou nulles. Le problème (2.20) se résume alors au problème suivant, où les vecteurs  $Q$  et  $d$  résultent du changement de variable :

$$\begin{cases} AX' = d \\ K_m X' + {}^t A U^s - V^s = -Q \\ {}^t V^s X' = 0, \quad X' \geq 0, \quad V^s \geq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

L'algorithme de la programmation linéaire complémentaire permet alors de résoudre le système. Il s'agit en fait d'un problème d'optimisation linéaire avec une sélection adéquate des variables candidates à entrer en base pour respecter les conditions de complémentarité de type  ${}^t V X = 0$ .

Il ressort également des travaux présentés par Disdier, Loute, et Pastor [54], que la résolution du problème de contact peut s'effectuer directement en exploitant la formulation quadratique (2.20), puisqu'ils ont démontré, en examinant la structure de (2.21),

l'équivalence de ces deux formulations (quadratique et linéaire) grâce à la relation de complémentarité. L'utilisation de logiciels spécialement conçus pour la résolution de problèmes quadratiques s'avère alors particulièrement intéressante pour notre problème de coussinet, après un travail d'adaptation de ces programmes à notre étude.

Il faut noter que cette écriture équivaut à passer de l'écriture en vitesse à celle en incréments sur le temps suffisamment petits pour rester en petites déformations.

## 2.5 Méthode de contact adhérent avec pénalisation

La méthode la plus simple pour modéliser les aspects « rigides » du contact et des lois d'adhérence consiste sans doute à permettre une faible pénétration proportionnelle à la compression dans la direction normale à la surface de contact ainsi qu'un glissement microscopique proportionnel au cisaillement dans la direction tangentielle (Fig. 2.3).

On décompose pour cela les distances et pressions de contact en composantes normales et tangentielles :

$$\begin{cases} d = d_n n + d_t t \\ p = p_n n + p_t t \end{cases} \quad (2.22)$$

La distance tangentielle de contact  $d_t$  est alors partagée en une partie dite adhésive  $d_t^a$  (réversible), proportionnelle à la contrainte de cisaillement  $p_t$ , et une partie glissante  $d_t^s$  (irréversible), contrôlée par une loi de frottement. La loi de contact avec frottement résultant de ce traitement (après élimination de  $d_t^a = d_t - d_t^s$ ) devient :

$$\begin{cases} p = 0 & \text{si } d_n \geq 0 & \text{non contact} & \text{(a)} \\ p = \frac{1}{\varepsilon} [d_n n + (d_t - d_t^s) t] & \text{si } d_n < 0 & \text{contact} & \text{(b)} \\ \dot{d}_t^s = \alpha \frac{p_t}{|p_t|}, \quad \alpha \geq 0, \quad Y(p) = |p_t| + \mu p_n \leq 0, \quad \alpha Y = 0 & & \text{(c)} \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\frac{1}{\varepsilon}$  est le coefficient de pénalité, pris très grand en comparaison des rigidités des solides en contact, pour conserver la pénétration et le glissement infinitésimaux.  $\alpha$  est un coeffi-

cient multiplicateur introduit pour exprimer la colinéarité de la vitesse de glissement avec la force de friction, et  $Y(p)$  est le critère de frottement.

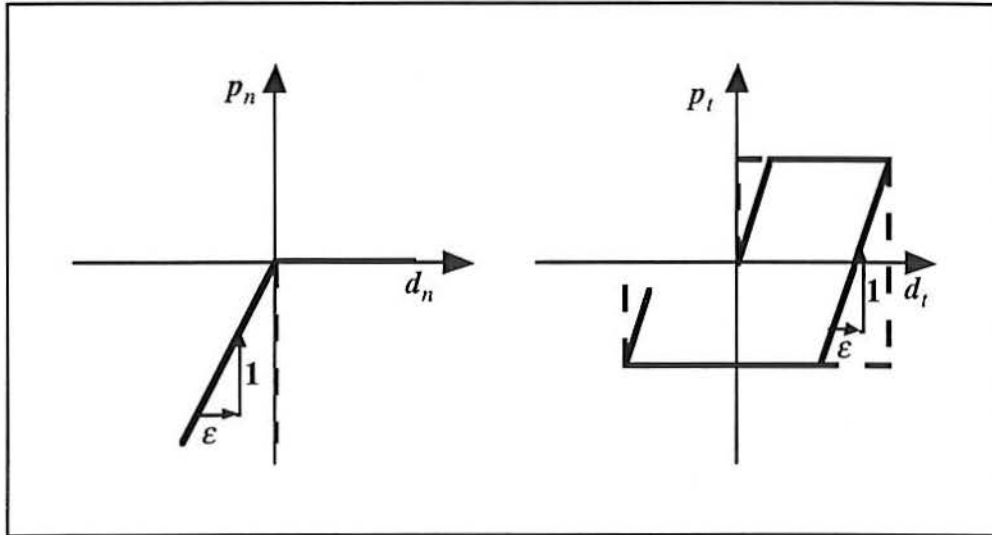


Figure 2.3 : Méthode de pénalisation

Le traitement exact des lois « rigides » de contact nécessite l'introduction d'une variable supplémentaire (multiplicateur de Lagrange) en plus des déplacements, ainsi qu'une équation supplémentaire (condition de complémentarité) en sus des équations d'équilibre. La méthode de pénalisation remplace la solution exacte en approximant certaines fonctions mais sans introduction de variables additionnelles. C'est ce type de méthode qui est utilisée avec le code de calcul industriel Systus+ utilisé pour la suite du travail présenté.

## 2.6 Résolutions numériques du problème

### 2.6.1 Introduction

Le problème de l'étude de la mesure de longueur développée d'un coussinet consiste à analyser le comportement du coussinet lorsqu'on applique sur l'une de ses extrémités un déplacement imposé (l'autre extrémité étant bloquée). Le montage, initialement prévu pour mesurer la pièce, permet aussi d'en contrôler sa qualité en fonction de son comportement lorsqu'on « relâche » ce déplacement imposé sur l'une des extrémités du coussinet.



En parallèle à l'étude du problème à l'aide du logiciel Minos pour la résolution de la formulation quadratique, nous avons utilisé le code d'élément finis SYSTUS+, pour apprentissage et test de ce dernier en contact, sachant qu'il nous servira également lors de la phase de formage du coussinet. Son utilisation pour des problèmes non classiques tels que le contact et la friction justifie pleinement les précautions employées et la nécessité de validations systématiques de tous les résultats, au moins dans une première étape. Il est en effet connu que pour les problèmes dissipatifs *le type de l'algorithme utilisé peut conduire, sans précautions spécifiques, à des solutions erronées.*

### 2.6.2 MINOS

Du fait de l'équivalence entre le problème de programmation quadratique et le problème de programmation linéaire avec condition de complémentarité, nous pouvons résoudre le problème mécanique du contact à partir de la formulation du problème de programmation quadratique en utilisant un logiciel spécialement conçu pour la résolution de ce type de problème.

Minos [60] est un logiciel d'optimisation écrit en Fortran, permettant de résoudre essentiellement des problèmes de programmation non linéaire (dont les problèmes de programmation quadratique). Son avantage par rapport à une méthode telle que celle du simplexe pour tenir compte de la relation de complémentarité, est de pouvoir résoudre directement le système posé sous forme non-linéaire, à savoir :

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } F(x) + c^T x + d^T y \\ &\text{avec } f(x) + A_1 y = b_1 \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$A_2 x + A_3 y = b_2 \tag{2.25}$$

$$i \leq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq s$$

où les vecteurs  $c, d, b_1, b_2, i, s$  et les matrices  $A_1, A_2, A_3$  sont des constantes.  $F(x)$  est une fonction régulière de la variable  $x$  et  $f(x)$  est un vecteur de fonctions quadratiques régulières.

On définit alors les composantes du vecteur  $x$  comme étant les variables non linéaires et les composantes du vecteur  $y$  comme les variables linéaires. De façon similaire, les équations (2.24) et (2.25) sont dénommées respectivement contraintes non linéaires et contraintes linéaires.

Ce logiciel utilise des algorithmes de base tels la méthode du simplexe (Dantzig [61]), la méthode quasi-Newton, l'algorithme de Wolfe ou une méthode par Lagrangien augmenté [62,63].

### 2.6.3 SYSTUS+

SYSTUS+ est un code d'éléments finis développé par Framasoft-CSI, particulièrement reconnu pour l'étude de problèmes de non linéarité matérielle ou géométrique. SYSTUS+ permet de simuler, entre autres, les phénomènes de contact bidimensionnels avec grands déplacements :

- entre un solide déformable et une ou plusieurs cibles rigides éventuellement mobiles ;
- entre plusieurs corps déformables.

Les cibles rigides sont décrites par l'intermédiaire de segments de droites et d'arcs de cercle. La formulation du contact s'appuie sur une méthode de pénalisation, les conditions de contact pouvant être :

- glissantes (frottement lisse) ;
- collantes ;
- collantes tangentiellement ;
- frottantes.

et les modélisations du frottement utilisées dans le cas de cette comparaison reposent sur l'un des deux modèles suivants :

- **modèle de Coulomb** :  $\|F_t\| \leq \mu_c \|F_n\|$  où  $F_n$  et  $F_t$  sont respectivement les forces normale et tangentielle au niveau de la zone de contact et  $\mu$  est le coefficient de frottement,
- **modèle de Tresca** :  $\|F_t\| \leq \mu_T \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$  où  $\sigma_0$  représente la limite d'élasticité du matériau.

La méthode des éléments finis, appliquée à la résolution des problèmes non linéaires, conduit à résoudre, à chaque instant, une équation du type :

$$\Psi = F - \Phi = 0 \quad (2.26)$$

où  $\Psi$  représente le vecteur des forces nodales résiduelles,  $F$  le vecteur des forces extérieures appliquées à la structure et  $\Phi$  celui des forces internes dues aux déplacements de la structure.

Pour la résoudre, nous procédons à une discrétisation à deux niveaux :

- une discrétisation dans le temps, le chargement étant monotone dans le cas présent ;
- et à un instant donné, une suite d'itérations pour minimiser les forces résiduelles.

Les charges appliquées à la structure sont supposées évoluer de manière quasi-statique.

La résolution de ce type de problèmes non-linéaires est donnée plus en détail au chapitre 3.

## 2.7 Simulation de la mise en compression du coussinet

### 2.7.1 Présentation du problème

L'étude du contact entre le coussinet et son logement est effectuée à partir d'une modélisation simplifiée du coussinet de bielle en l'assimilant à une pièce de forme semi-circulaire de rayon interne 20 mm et de 21,5 mm pour le rayon externe. Il est supposé élastique avec un module d'Young de 65 GPa, un coefficient de Poisson égal à 0,3 et une limite d'élasticité en traction de 130 Mpa. Ces valeurs sont choisies arbitrairement le temps de validation des approches de calcul retenues. Le logement est quant à lui supposé infiniment rigide, ce qui est raisonnable.

Compte tenu du rapport entre l'épaisseur du coussinet et sa longueur, les calculs seront effectués avec l'hypothèse des déformations planes. Cette hypothèse est justifiée car du fait du frottement, on peut considérer que le déplacement dans la direction  $z$  est empêché. Les conditions aux limites sont toutes de type déplacement, à savoir : le chargement utilisé est un déplacement vertical imposé de 0,1 mm sur l'un des bords du coussinet (Fig. 2.4), l'autre étant fixé à déplacement vertical nul.

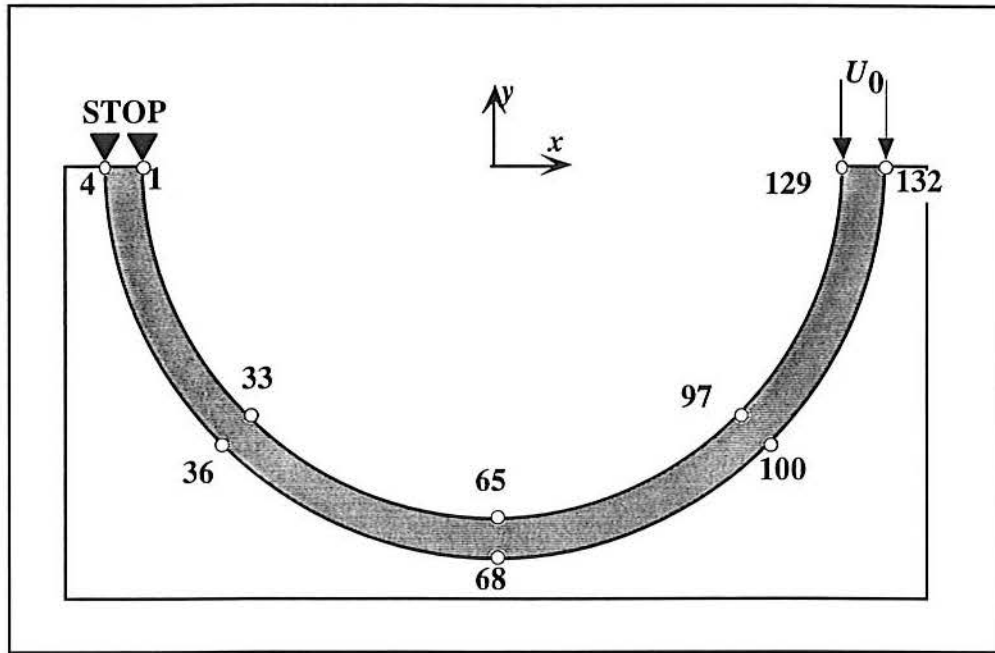


Figure 2.4 : Coussinet en compression dans son logement

Le maillage éléments finis utilisé pour discrétiser le coussinet est composé uniquement d'éléments triangulaires de degré 1. Ce maillage est bien entendu le même aussi bien pour la résolution de ce problème de contact par notre méthode utilisant les algorithmes de résolution de Minos que par l'utilisation du code d'éléments finis industriel Systus+. Le logement du coussinet étant supposé parfaitement rigide, il n'est pas nécessaire de le mailler, seules les conditions de contact unilatéral seront considérées pour les noeuds constituant l'interface entre le coussinet et son logement.

### 2.7.2 Cas du glissement pur

Dans ce premier cas les valeurs des contraintes seuils sont toutes nulles ( $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ), le domaine  $D$  des contraintes admissibles avant glissement est réduit à une demi-droite (Fig. 2.5)

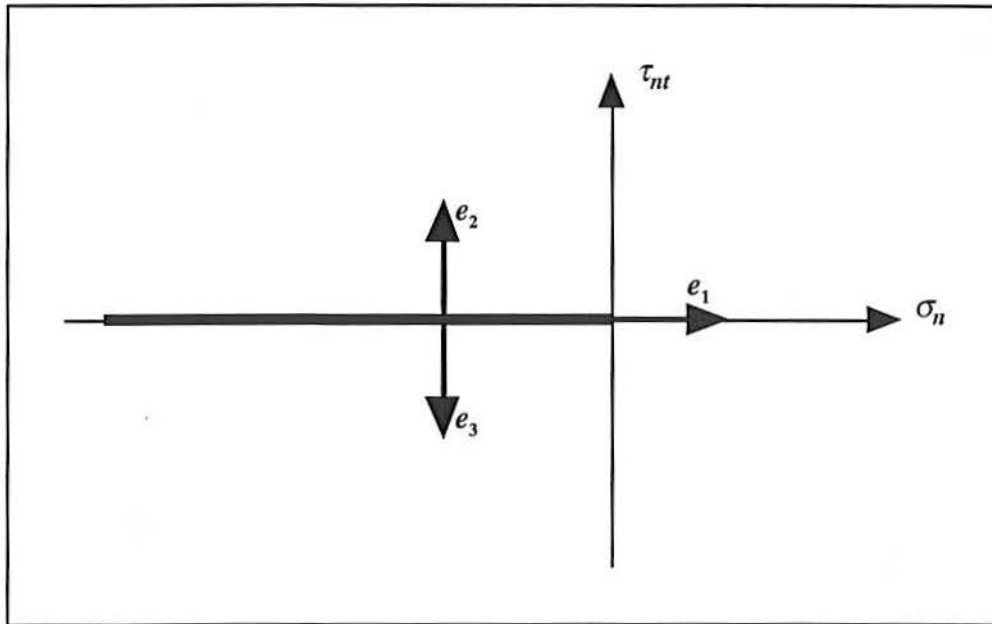


Figure 2.5 : Contact lisse (glissement pur)

Les deux méthodes utilisées pour l'étude de ce problème de contact (Minos et Systus+) aboutissent rigoureusement au même champ de déplacements solution, ce qui est normal du fait de l'unicité de la solution dans ce cas précis du glissement pur, et qui valide les deux approches.

Par souci de concision, nous ne donnerons les valeurs du champ des déplacements simplement que pour une dizaine de points significatifs portés sur la figure 2.4 précédente. Les résultats figurent sur le tableau 2.1.

POINTS	MINOS		SYSTUS	
	Ux (mm)	Uy (mm)	Ux (mm)	Uy (mm)
1	9.22E-04	0	9.22E-04	0
4	0	0	0	0
33	-1.550E-02	1.87E-02	-1.550E-02	1.87E-02
36	-1.74E-02	1.92E-02	-1.74E-02	1.92E-02
65	-4.83E-02	3.54E-03	-4.83E-02	3.54E-03
68	-5.18E-02	2.54E-03	-5.18E-02	2.54E-03
97	-5.47E-02	-4.78E-02	-5.47E-02	-4.78E-02
100	-5.77E-02	-5.23E-02	-5.77E-02	-5.23E-02
129	-1.34E-02	-1.00E-01	-1.34E-02	-1.00E-01
132	-1.17E-02	-1.00E-01	-1.17E-02	-1.00E-01

Tableau 2.1 : Déplacements obtenus sans frottement

Les sorties graphiques des contraintes de Von Mises et des pressions normales de contact sont représentées sur la figure 2.6. Faute d'informations suffisantes sur le processus de calcul des contraintes de Mises utilisé par Systus+, nous avons vérifié là encore la validité des résultats en recalculant nous-mêmes ces contraintes au centre des mailles à partir des déplacements préalablement obtenus. La post-analyse des résultats montre aussi que les déformations sont inférieures à  $5.10^{-3}$ , ce qui justifie bien l'hypothèse des petites déformations prise au départ.

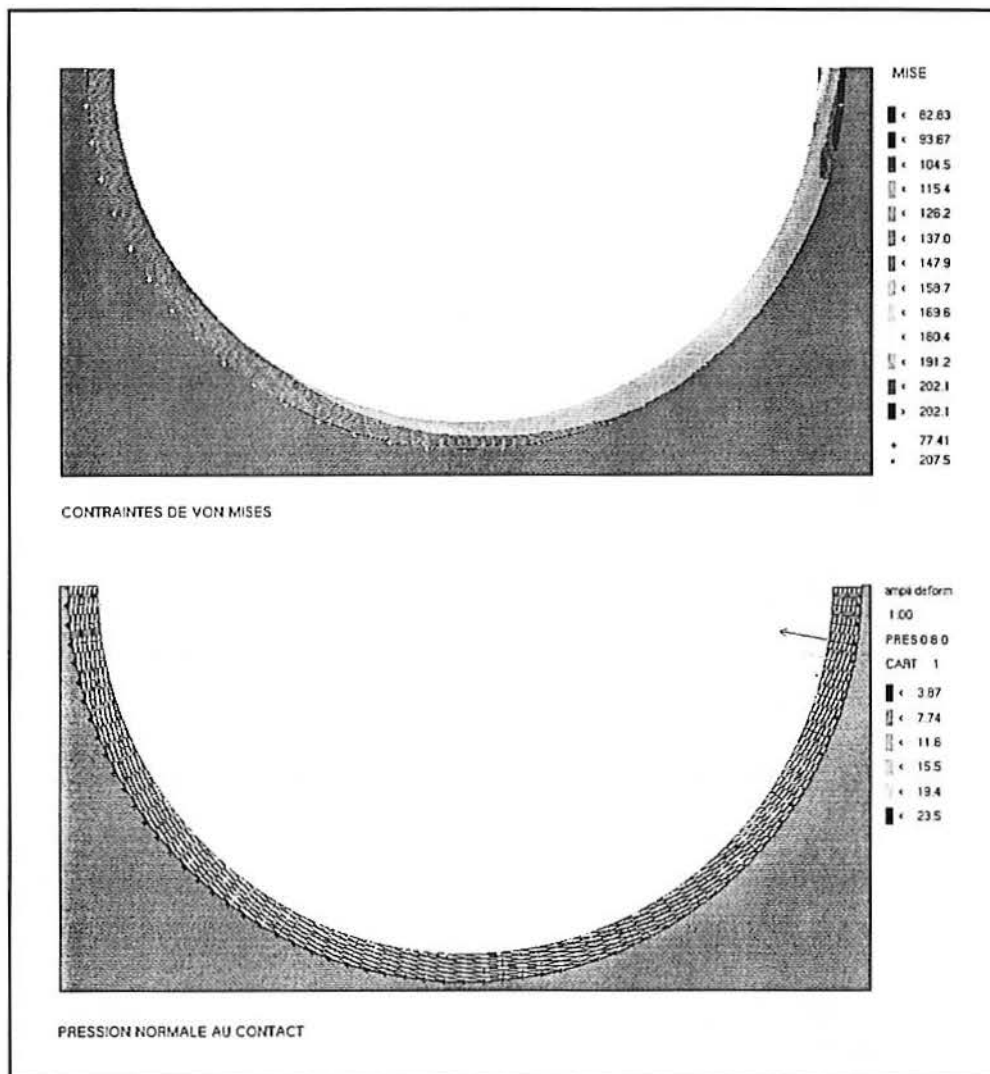


Figure 2.6 : Contraintes de Von Mises et pressions de contact normales dans le cas sans frottement

### 2.7.3 Cas du frottement de Tresca

La loi de frottement retenue ici correspond au critère de Tresca sans traction (Fig. 2.7) où la valeur de la contrainte tangentielle ( $c_2$  et  $c_3$ ) seuil est évaluée à partir de la limite d'élasticité  $\sigma_0$  du matériau constituant le coussinet :

$$\tau_{\text{lim}} = 0,1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (2.27)$$

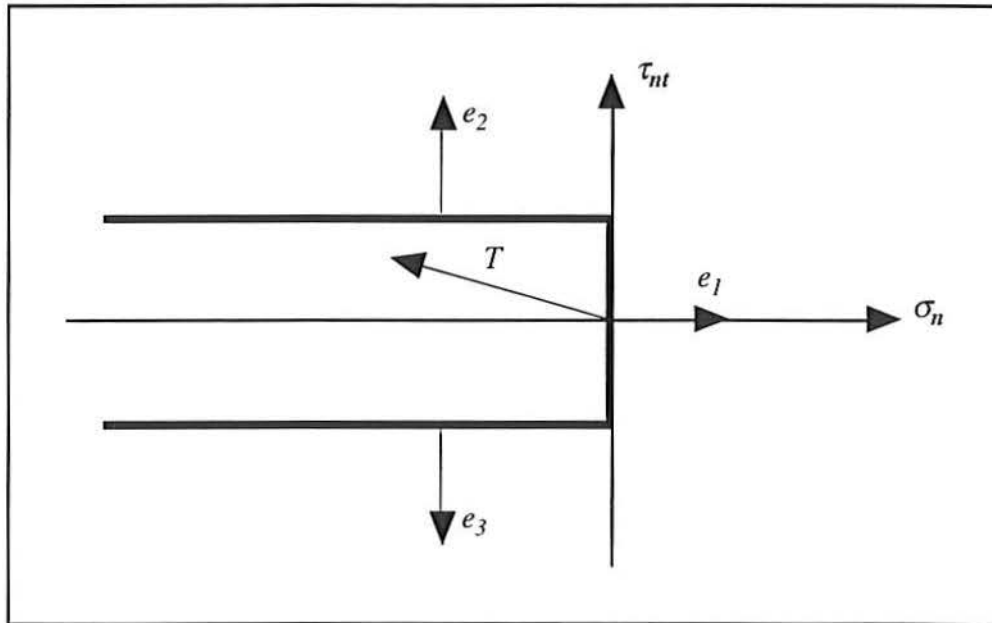


Figure 2.7 : Frottement de Tresca

Le champ des déplacements obtenu par notre méthode ou bien par l'utilisation du code d'éléments finis Systus+ sont quasiment identiques pour les déplacements de valeur significative (l'unicité n'est plus démontrée, mais probable pour ce problème). Tout comme dans le cas du glissement pur, nous avons résumé les résultats obtenus par chacune des deux méthodes pour quelques points caractéristiques (Tableau 2.2).

Les sorties graphiques des isovaleurs des contraintes de Von Mises et des pressions normales sont représentées sur la figure 2.8. Comme pour le cas précédent, les isovaleurs de Mises sont là encore vérifiées.

POINTS	MINOS		SYSTUS	
	Ux (mm)	Uy (mm)	Ux (mm)	Uy (mm)
1	2.73E-09	0	3.35E-09	0
4	0	0	0	0
33	-2.95E-04	5.30E-04	-3.02E-04	5.38E-04
36	-2.24E-04	2.47E-04	-2.32E-04	2.56E-04
65	-1.39E-02	1.60E-03	-1.39E-02	1.61E-03
68	-1.46E-02	7.15E-04	-1.46E-02	7.15E-04
97	-3.54E-02	-2.97E-02	-3.54E-02	-2.97E-02
100	-3.63E-02	-3.29E-02	-3.63E-02	-3.29E-02
129	-1.31E-02	-1.00E-01	-1.31E-02	-1.00E-01
132	-9.96E-03	-1.00E-01	-9.94E-03	-1.00E-01

Tableau 2.2 : Déplacements obtenus avec frottement de Tresca

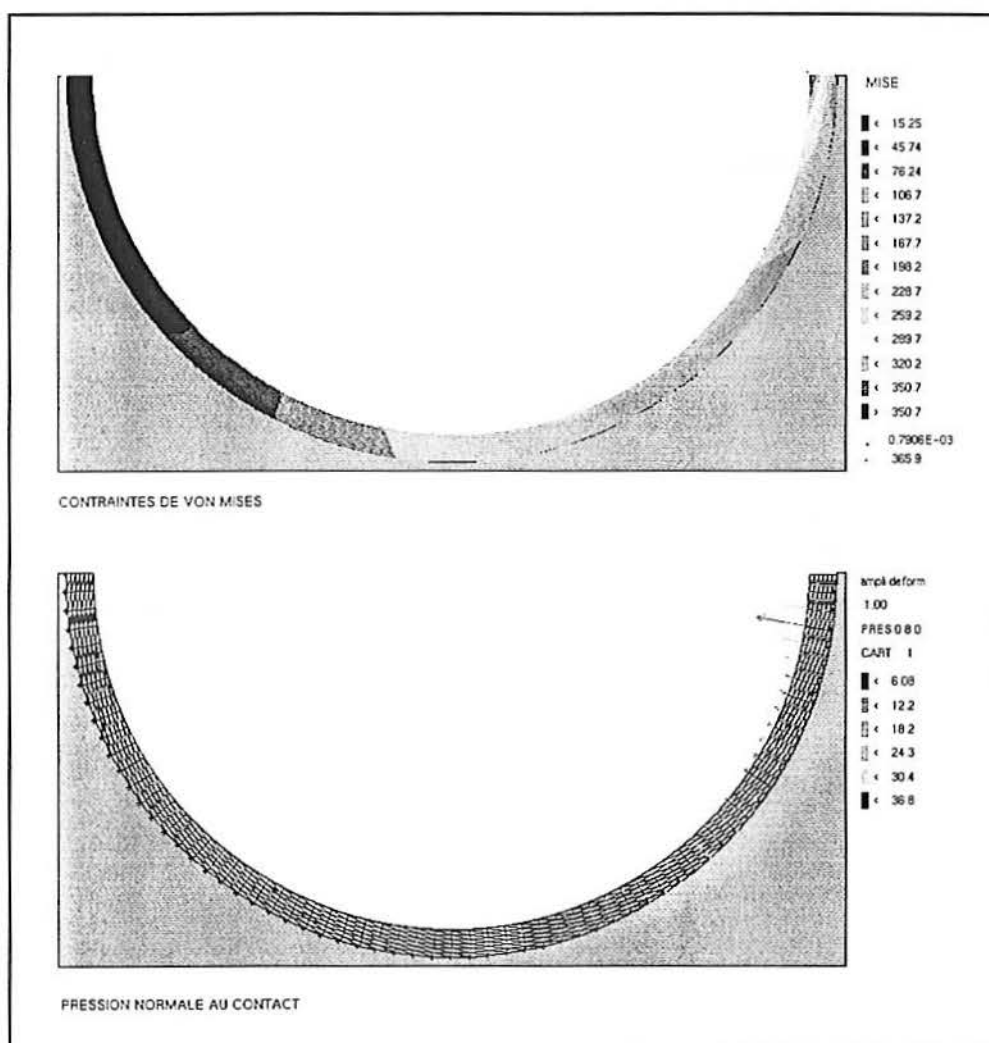


Figure 2.8 : Contraintes de Von Mises et pressions de contact normales dans le cas du frottement de Tresca



### 2.7.4 Cas du frottement de Coulomb

La loi de frottement retenue ici répond à un critère de Coulomb (Fig. 2.9), avec  $\mu = 0,2$ .

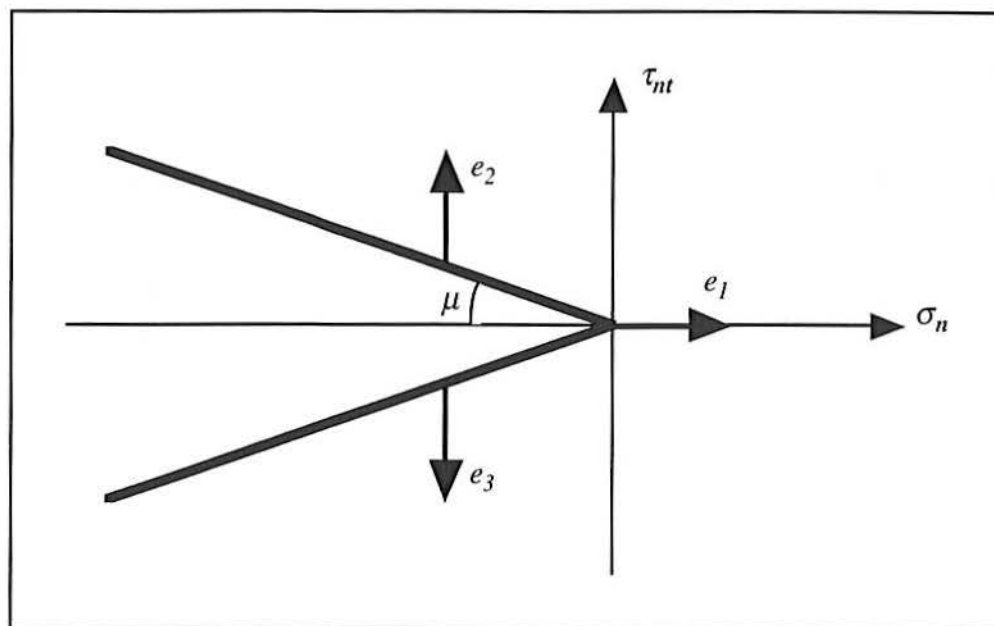


Figure 2.9 : Frottement de Coulomb

Seul SYSTUS nous a permis d'étudier le coussinet avec un frottement de Coulomb. Les vérifications positives effectuées lors des essais précédents nous permettent de retenir cette approche, étant entendu qu'un contrôle *a posteriori* sera effectué sur la zone de contact. Par souci de clarté nous ne donnerons les déplacements que pour les mêmes points significatifs obtenus avec SYSTUS (Tableau 2.3).

POINTS	SYSTUS	
	Ux (mm)	Uy (mm)
1	6.38E-04	0
4	0	0
33	-1.162E-02	1.41E-02
36	-1.30E-02	1.44E-02
65	-3.97E-02	3.05E-03
68	-4.25E-02	2.09E-03
97	-4.96E-02	-4.30E-02
100	-5.21E-02	-4.72E-02
129	-1.27E-02	-1.00E-01
132	-1.06E-02	-1.00E-01

Tableau 2.3 : Déplacements obtenus avec frottement de Coulomb

Les sorties graphiques des isovaleurs des contraintes de Mises et des pressions normales sont représentées sur la figure 2.10. La post-analyse concernant les contraintes de Mises est de nouveau effectuée et valide bien nos résultats.

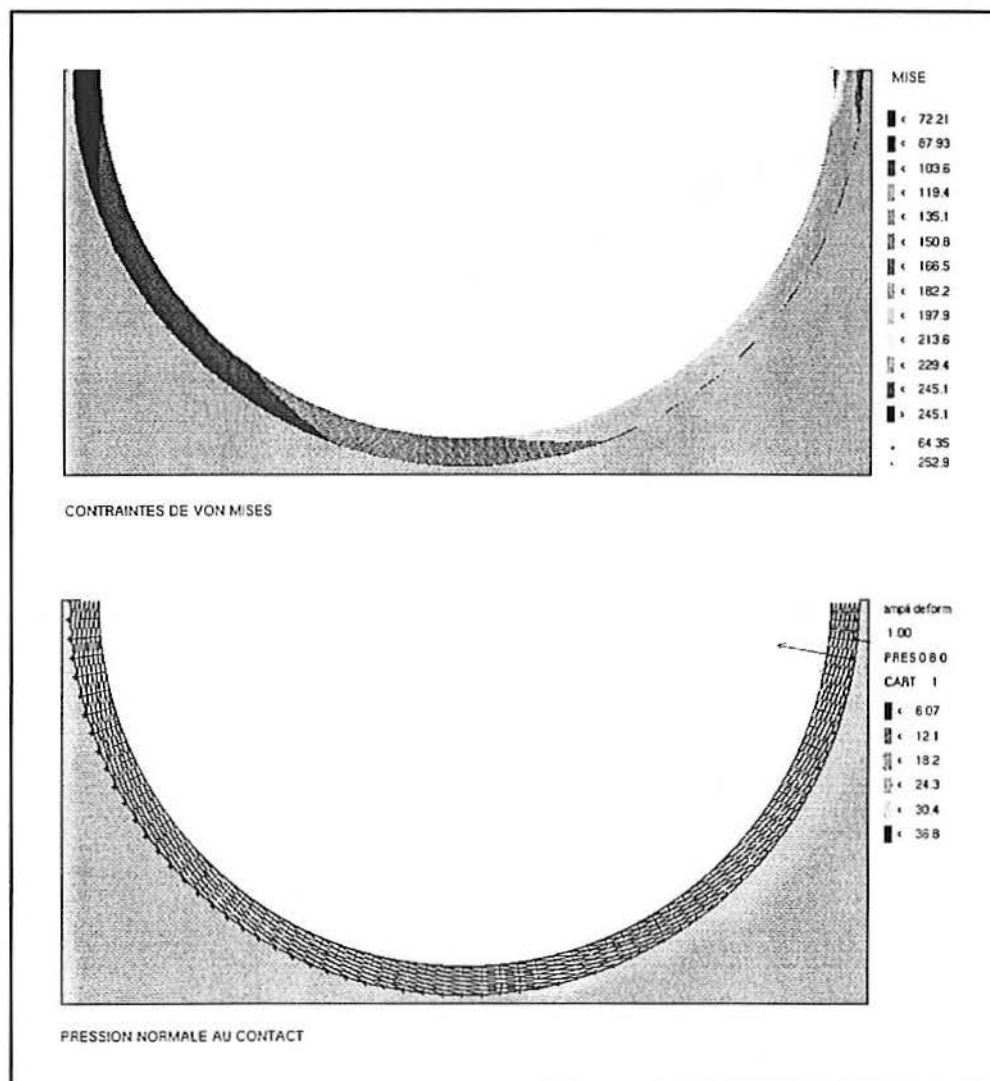


Figure 2.10 : Contraintes de Von Mises et pressions de contact normales dans le cas du frottement de Coulomb

Si l'on examine la modélisation retenue dans Systus, elle est du type essais-erreurs, avec correction des écarts à l'équilibre. Selon les valeurs des incréments retenus, la solution pourra différer, particulièrement si la taille des incréments est mal accordée au problème traité.

En revanche, l'outil type quadratique que nous avons utilisé conserve le caractère statiquement admissible (équilibres vérifiés) et plastiquement admissible (ici la loi de frottement) rigoureusement, ce qui est un avantage indéniable en non linéaire. De ce fait l'extension de notre programme, au frottement de Coulomb serait tout à fait souhaitable. Cette impression est confortée par le fait que l'ensemble de nos calculs réalisés nous mon-

tre qu'il n'est pas toujours facile de faire converger l'approche retenue particulièrement lors de la décharge pour obtenir la perte de longueur développée du coussinet.

## 2.8 Approche expérimentale du frottement

### 2.8.1 Présentation de l'essai

Des essais expérimentaux ont été mis en place afin d'approcher au mieux le type de frottement apparaissant entre le coussinet et le berceau. On a pour cela utilisé un berceau de contrôle conçu pour les mesures de longueur développée du coussinet. Le coussinet est muni de sept jauges extensométriques réparties le long de sa surface interne (Fig. 2.11).

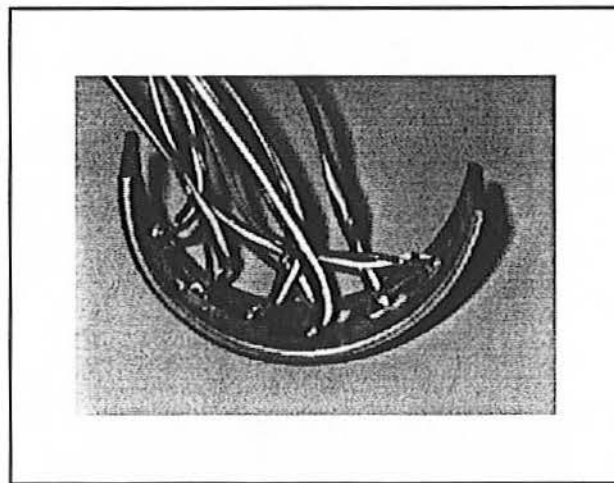


Figure 2.11 : coussinet muni de jauges extensométriques

La lecture des déformations à partir des jauges extensométriques est là encore réalisée à l'aide d'un pont de Wheatstone monté en quart de pont.

Le diamètre externe du coussinet est légèrement plus petit que celui du berceau correspondant, ceci pour assurer parfaitement la mise en place du coussinet dans l'axe de son berceau. L'un des plans de joint de la pièce vient en butée contre un arrêt prévu à cet effet.

L'ensemble est ensuite monté dans un système permettant d'imposer et de contrôler une charge sur le flanc opposé à celui bloqué, ceci à l'aide d'un bras de levier amorti par un vérin hydraulique (Fig. 2.12). Situé parallèlement au système de charge imposé, un comparateur permet de contrôler le déplacement vertical correspondant.

Ces calculs étant confrontés aux mesures expérimentales, les véritables caractéristiques des matériaux sont utilisées, à savoir :  $E_{acier} = 194,9$  GPa,  $\sigma_{lim\ acier} = 384$  MPa,  $\nu_a$ .

$\nu_{AISn} = 0,28$ ,  $E_{AISn} = 56,1$  GPa,  $\sigma_{lim AISn} = 48,5$  MPa,  $\nu_{AISn} = 0,34$ . Ces valeurs sont déterminées expérimentalement avec les mêmes techniques de mesure que celles présentées dans le premier chapitre. On trouvera dans l'annexe C les courbes de traction de chacun des matériaux discrétisés pour le calcul par éléments finis.

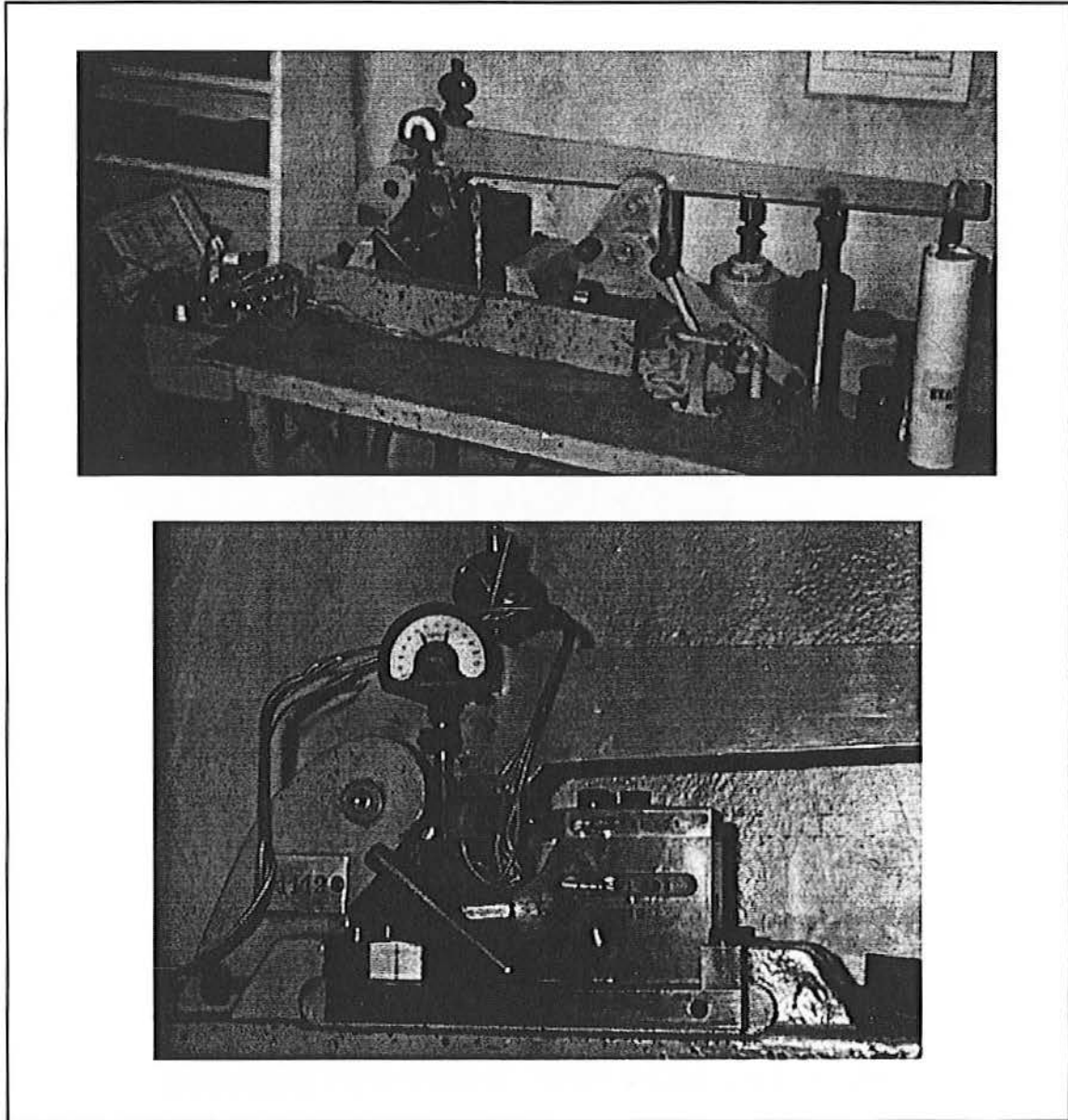


Figure 2.12 : appareillage de mesure de longueur développée

### 2.8.2 Approche analytique type RDM

A partir des résultats expérimentaux on se propose de déterminer la valeur du coefficient de frottement. Les hypothèses de travail sont celles de la RDM, et le frottement est du type Coulomb ( $|\tau_{r\theta}| = \mu|\sigma_r|$ ). En plus de ces hypothèses, plusieurs simplifications s'avèrent nécessaires pour mener à bien cette approche :

- le coussinet est supposé être une coquille demi-cylindrique parfaite ; le rayon de courbure est alors constant et sa longueur développée est égale à  $\pi \frac{R_i + R_e}{2}$ , avec  $R_i$  et  $R_e$  sont les rayons interne et externe du coussinet ;
- le rayon du berceau est identique au rayon extérieur du coussinet, et par conséquent, le contact est toujours supposé parfait, et le frottement mobilisé partout du fait de l'identité des rayons.

Les hypothèses retenues (RDM) stipulent que les contraintes radiales dans le coussinet sont négligeables devant les contraintes normales aux sections, et que les sections droites restent planes et droites.

Enfin le coussinet est considéré ici comme étant un matériau bicouche, constitué d'un support acier et d'un revêtement antifrottement.

#### Première équation

Ecrivons l'équilibre des moments en  $O$  pour un tronçon du coussinet compris entre deux jauges (Fig. 2.13) :

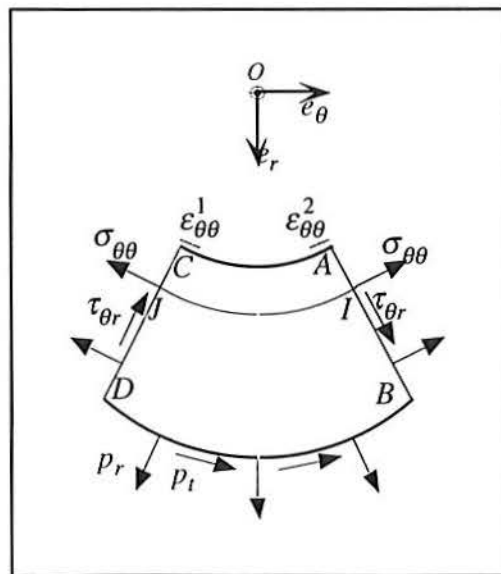


Figure 2.13 : Tronçon compris entre deux jauges

Soient  $p_r$  et  $p_t$  les composantes radiale et tangentielle de la pression exercée au dos du coussinet en contact,  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\tau_{\theta r}$  sont les contraintes normales et tangentielles réparties le long des cotés du tronçon.

Le moment en  $O$  résultant de  $\tau_{\theta r}$  sur les faces transverses ainsi que le moment de  $p_r$  sur la surface de contact sont nuls :

$$M_{z/O} = l \int_A^B r \sigma_{\theta\theta} dr - l \int_C^D r \sigma_{\theta\theta} dr + l \int_D^B p_r R_c^2 d\theta = 0 \quad (2.28)$$

Durant la période de charge,  $p_r$  est négatif car le coussinet est toujours en compression, alors que  $p_t$  est positif, et donc  $p_t = -\mu p_r$ ,

$$M_{z/O} = l \int_A^B r \sigma_{\theta\theta} dr - l \int_C^D r \sigma_{\theta\theta} dr - \mu l R_c^2 \int_D^B p_r d\theta = 0 \quad (2.29)$$

avec  $OA = OC = R_i$ ,  $OB = OD = R_c$ , et  $l$  est la largeur de l'éprouvette.

En conservant l'hypothèse selon laquelle les sections droites restent planes et droites, on peut alors montrer que  $\varepsilon_{\theta\theta}$  reste constante sur une section droite et prend pour valeur la déformation lue à partir des jauges (ce qui est bien-sûr une approximation), soit :

$$\mu R_c^2 \int_D^B p_r d\theta = \frac{1}{2} (\varepsilon_{0/AB} - \varepsilon_{0/CD}) [E_1 ((R_i + a)^2 - R_i^2) + E_2 ((R_i + e)^2 - (R_i + a)^2)] \quad (2.30)$$

avec  $a$  et  $E_1$  l'épaisseur de la couche antifricction du coussinet et son module d'Young correspondant,  $e$  l'épaisseur totale et  $E_2$  le module du support acier.

En appelant  $K_i$  la valeur de  $\mu \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p_r d\theta$  dans un tronçon  $i$ ,  $K_i$  est directement proportionnel à la différence des déformations mesurées :

$$K_i = K (\varepsilon_{\theta_{i+1}} - \varepsilon_{\theta_i}) \quad (2.31)$$

avec  $K = \frac{1}{2R_c^2} [E_1 ((R_i + a)^2 - R_i^2) + E_2 ((R_i + e)^2 - (R_i + a)^2)] = cste$

## Deuxième équation

Ecrivons maintenant l'équilibre des moments en  $M$ , point d'application de  $F_1$ , la force résultante de la flasque de butée sur le flanc du coussinet (Fig. 2.14)

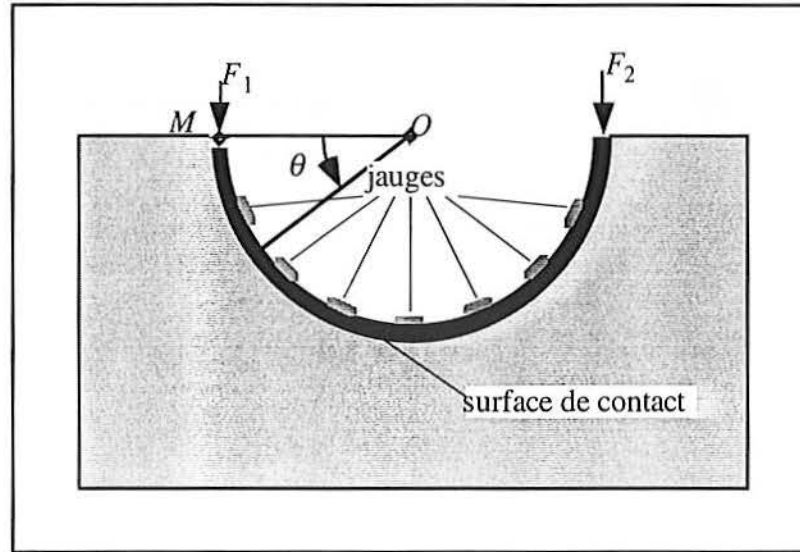


Figure 2.14 : Représentation schématique de l'essai

$F_2$ , qui est imposé, est connu alors que  $F_1$  est inconnu. Le moment de  $F_1$  en  $M$  est nul, et celui de  $F_2$  est égal à :

$$M_{/M}(F_2) = -F_2(R_e + R_i) \quad (2.32)$$

Les moments des forces de contact normales et tangentielles sont calculés en  $O$  avant d'être ramenés en  $M$ . En  $O$ , le moment des forces de contact normales est nul, il reste alors :

$$M_{z/O} = R_e^2 l \int_r p_t d\theta \quad (2.33)$$

On peut ensuite calculer le moment en  $M$  des forces de contact :

$$M_{/M} = M_{/O} + MO \wedge \int_r f ds \quad (2.34)$$

avec  $f = l \begin{pmatrix} p_t \sin \theta - p_r \cos \theta \\ -p_t \cos \theta - p_r \sin \theta \end{pmatrix}$  et  $ds = R_e d\theta$

On peut maintenant écrire le moment total en  $M$  :

$$M_{z_{total}/M} = R_e^2 l \int_0^\pi p_r d\theta - \frac{R_e}{2} (R_e + R_i) l \int_0^\pi (p_r \cos \theta + p_r \sin \theta) d\theta - F_2 (R_e + R_i) = 0 \quad (2.35)$$

$$\text{soit } -R_e^2 \mu \int_0^\pi p_r d\theta - \frac{R_e}{2} (R_e + R_i) \left[ -\mu \int_0^\pi p_r \cos \theta d\theta + \int_0^\pi p_r \sin \theta d\theta \right] - \frac{F_2}{l} (R_e + R_i) = 0 \quad (2.36)$$

ce qui peut encore s'écrire, en utilisant (2.32) :

$$-R_e^2 \sum_i K_i - \frac{R_e}{2} (R_e + R_i) \left[ -\mu \sum_i \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p_r \cos \theta d\theta + \sum_i \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p_r \sin \theta d\theta \right] - \frac{F_2}{l} (R_e + R_i) = 0 \quad (2.37)$$

On pose alors  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  tels que :

$$\begin{aligned} A &= -R_e^2 \sum_i K_i \\ B &= \mu \frac{R_e}{2} (R_e + R_i) \sum_i \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p_r \cos \theta d\theta \\ C &= -\mu \frac{R_e}{2} (R_e + R_i) \sum_i \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p_r \sin \theta d\theta \\ D &= -\frac{F_2}{l} (R_e + R_i) \end{aligned} \quad (2.38)$$

et l'équation (2.37) peut se ramener sous la forme suivante :

$$\mu = -\frac{C}{A + B + D} \quad (2.39)$$

On obtient ainsi une équation qui fournit une première évaluation du coefficient  $\mu$ .

Les valeurs  $B$  et  $C$  dépendent toutes deux de  $p_r$  ; afin de résoudre cette dernière équation, une nouvelle hypothèse doit être faite sur la distribution de  $p_r$  à l'intérieur d'un tronçon.

•  **$p_r$  est supposé constant par tronçon**

L'équation 1 nous fournit à chaque tronçon inter-jauges les valeurs moyennes  $\langle p_r \rangle = \langle -\mu p_r \rangle$ . On postule une répartition uniforme des variables égales à leurs valeurs moyennes entre les deux jauges.



Dans un tronçon  $i$ , on peut écrire :

$$p_{r_i} = \langle p_r \rangle_i = \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} p_r d\theta = \text{constante} \quad (2.40)$$

On injecte ensuite cette distribution de  $p_r$  dans l'équation d'équilibre des moments en  $M$  des efforts : on suppose à cet effet  $\sigma_r$  négligeable au droit des sections extrêmes, ce qui est raisonnable. Les valeurs  $B$  et  $C$  peuvent alors être développées :

$$B = \frac{R_e}{2\Delta\theta} (R_e + R_i) \sum_i (K_i (\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i)) \quad (2.41)$$

$$C = \frac{R_e}{2\Delta\theta} (R_e + R_i) \sum_i (K_i (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i)) \quad (2.42)$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont alors facilement calculables.

•  $p_r$  est supposé affine par tronçon

$p_r$  est cette fois-ci affine et non plus seulement constante, et son expression, dans un tronçon  $i$ , prend la forme suivante :

$$p_r(\theta) = \frac{p_r(\theta_{i+1}) - p_r(\theta_i)}{\Delta\theta} (\theta - \theta_i) + p_r(\theta_i) \quad (2.43)$$

De cette nouvelle équation on peut tirer l'égalité suivante :

$$\frac{p_r(\theta_{i+1}) + p_r(\theta_i)}{2} = \frac{K_i}{\mu\Delta\theta} \quad (2.44)$$

Si dans ce problème on a disposé  $(n - 1)$  jauges, il en résulte  $n$  tronçons, soit  $n$  inconnues  $p_r(\theta_i)$ . En considérant que l'on a continuité des pressions de contact entre deux tronçons on peut en déduire  $(n - 1)$  équations. De plus, en  $\theta = \pi$ , on peut raisonnablement écrire que  $p_r(\pi) = 0$  (entre autre au vu des calculs MEF), ce qui permet de démarrer le processus.

De proche en proche, partant du bord où  $p_r$  est donc négligé, on peut, connaissant les valeurs moyennes, déterminer tous les  $p_r(\theta_i)$ , et ainsi la distribution de  $p_r$  cherchée le long du coussinet en écrivant simplement :

$$p_r(\theta_i) = 2 \frac{K_i}{\mu \Delta \theta} - p_r(\theta_{i+1}) \quad (2.45)$$

Les valeurs  $B$  et  $C$  peuvent alors se déduire aisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \mu \frac{R_e}{2} (R_e + R_i) \sum_i \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{p_r(\theta_{i+1}) - p_r(\theta_i)}{\Delta \theta} (\theta - \theta_i) + p_r(\theta_i) \right) \sin \theta \\ + \frac{p_r(\theta_{i+1}) - p_r(\theta_i)}{\Delta \theta} \cos \theta \end{array} \right]_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \\ C = \mu \frac{R_e}{2} (R_e + R_i) \sum_i \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{p_r(\theta_{i+1}) - p_r(\theta_i)}{\Delta \theta} (\theta - \theta_i) + p_r(\theta_i) \right) \cos \theta \\ - \frac{p_r(\theta_{i+1}) - p_r(\theta_i)}{\Delta \theta} \sin \theta \end{array} \right]_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Le coussinet, avant et après déformation, est donc cylindrique et conserve le même rayon. Ceci, ajouté à l'hypothèse de Navier-Bernoulli à la base de la RDM (raisonnable ici), nous permet de montrer aisément que la déformation  $\varepsilon_\theta$ , seule non nulle, est constante dans la section. On peut donc raisonner en approche RDM (étendue éventuellement à la déformation plane) : la contrainte normale  $\sigma_\theta$  est donc connue dans chaque section au droit des jauges, puisque celle-ci nous donne précisément la déformation cherchée, sous les hypothèses précédentes. Là aussi l'approche MEF confirme cette approximation très peu après la zone d'appui actif.

### 2.8.3 Exploitation des résultats

Remarquons que ces équations, pour être exploitables, nécessitent la connaissance des contraintes dans chacune des deux sections terminales du tronçon, d'où le recours à une modélisation RDM, toujours dans le but d'obtenir une approche simplifiée à conforter à l'approche MEF et vice et versa. Le coussinet est donc supposé cylindrique et à l'état sensiblement neutre au départ de cet essai, ce que confirme l'approche MEF des étapes précédentes de formage.

Nous procédons ainsi par comparaison de résultats issus d'un calcul MEF simulant l'essai de compression du coussinet dans son berceau de contrôle aux valeurs expérimentales. A partir du calcul MEF, tout comme pour les résultats expérimentaux, les déformations cor-

respondantes sont issues des déformations moyennes aux mailles coïncidant à l'endroit des jauges, soit à  $\theta = 22,5, 45, 67,5, 90, 112,5, 135$  et  $162,5^\circ$  (Fig. 2.15).

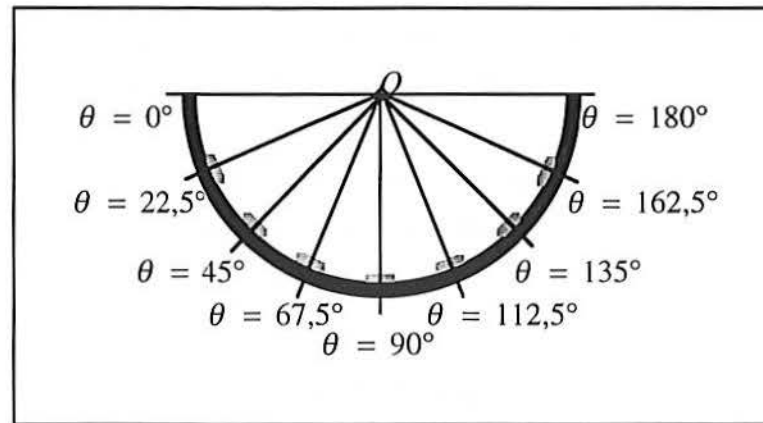


Figure 2.15 : Positionnement des jauges et lieux des déformations

Pour  $\theta = 0$ ,  $\varepsilon_\theta$  est obtenue par extrapolation linéaire des deux valeurs de déformation précédentes, et pour  $\theta = \pi$ ,  $\varepsilon_\theta$  est prise égale au rapport  $F/ES$ ,  $F$  étant la force résultante exercée sur le côté par appui du poinçon sur le coussinet,  $E$  le module d'Young moyen du coussinet, et  $S$  sa section.

### Validation MEF de l'approche analytique

Tel qu'on l'a présenté précédemment, on se sert de l'approche MEF dans un but de validation de l'approche analytique proposée. Pour mener ces calculs, on a choisi arbitrairement un coefficient de frottement égal à 0,2, c'est donc la valeur que l'on s'attend à retrouver après application des déformations aux équations analytiques proposées.

Sur la figure 2.16 sont représentées les déformations obtenues le long du coussinet pour différentes valeurs du chargement imposé notées ici en MPa. Les valeurs des déformations relevées aux extrémités du coussinet sont celles issues de l'extrapolation linéaire préalablement citée. Toutefois, afin de respecter au mieux les conditions d'expérimentation, nous avons simulé avant le démarrage de l'essai de compression la mise en place du coussinet dans son berceau en tenant compte de la véritable différence de diamètre réelle entre le coussinet et le logement.

C'est donc à partir des résultats de ce premier calcul que la mise en compression du coussinet peut être simulée. L'état de la pièce est alors modifié, la géométrie n'est plus parfaitement cylindrique et les états de contraintes et des déformations ne sont pas nuls. Par conséquent, durant une première partie de la simulation, le contact du coussinet avec le berceau n'est assuré qu'en deux points d'appui. On a vu en 2.7 que les contraintes et

donc les déformations au sein du coussinet mis en compression variaient de façon monotone le long du coussinet dès que l'on s'éloigne du point d'imposition de la sollicitation. Il n'en ait rien sur la figure 2.16, car le coussinet subit en premier lieu un moment de flexion. Lorsque que l'on atteint le contact parfait entre le coussinet et le berceau de contrôle, on a plus qu'un effort de compression et les déformations varient alors linéairement tout du long du coussinet avec la charge imposée.

Pour réaliser une bonne comparaison avec les essais expérimentaux, les déformations représentées figure 2.16 sont remises à zéro avant le tassement du coussinet.

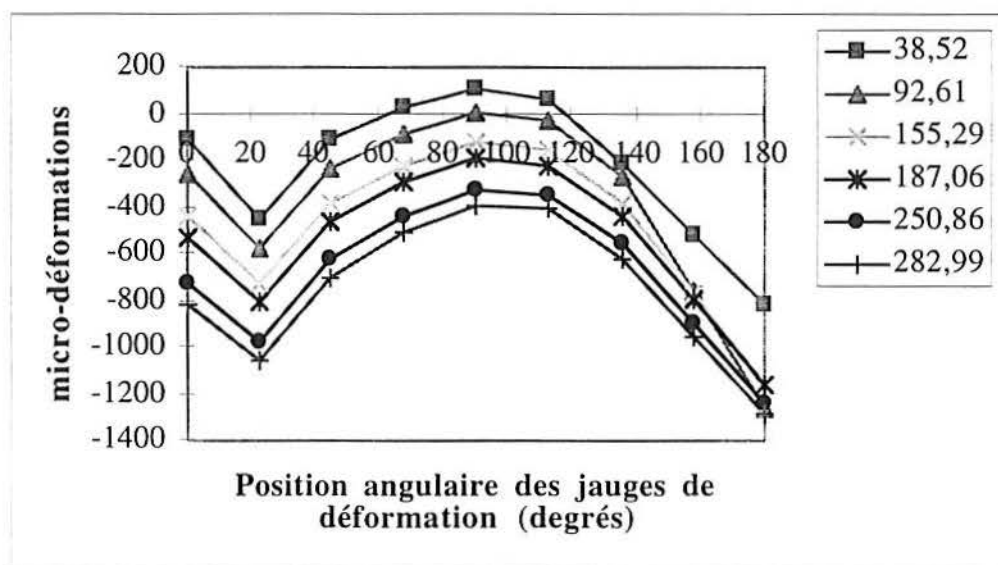


Figure 2.16 : Déformations le long du coussinet pour différentes valeurs de chargement imposées

Les déformations en tête du coussinet, soit pour  $\theta = 0$ , ne suivent pas l'allure générale des déformations dans le reste du coussinet. Cela s'explique par le mode de sollicitation imposé. En effet, le tassement est régi par l'abaissement du poinçon sur le plan de joint, bloquant ainsi toute rotation dans cette zone de la pièce et empêchant la discontinuité des déformations.

Sont portées maintenant dans le tableau 2.4 les valeurs du coefficient de frottement obtenues à l'aide des méthodes analytiques, en considérant tour à tour une distribution constante de la pression normale de contact sur chaque tronçon du coussinet, puis une distribution affine.

$\mu$ imposé	$\mu = f(p_r)$ $p_r$ constant	$\mu = f(p_r)$ $p_r$ affine
0,2	0,176	0,182

Tableau 2.4 : Coefficients de frottement imposé et calculés

On rappelle toutefois que l'application du modèle pour la détermination des coefficients de frottement n'est possible que lorsque le contact est atteint sur toute la longueur du coussinet.

Les deux approches analytiques du coefficient de frottement fournissent un résultat avec moins de 10% d'erreur, ce qui est tout à fait satisfaisant compte tenu des nombreuses approximations que nécessitent les simplifications du modèle. En plus de ces erreurs induites, il faut rappeler l'influence des hypothèses RDM négligeant la part des contraintes radiales devant les contraintes normales aux sections du coussinet.

Ces considérations nous permettent désormais l'utilisation directe de ces approches avec les résultats expérimentaux.

### Vérifications expérimentales

Les valeurs des déformations et des forces imposées sont cette fois-ci directement issues des résultats expérimentaux. Toutefois, afin de nous affranchir des problèmes liés aux différences de diamètre entre le coussinet et son berceau, nous choisissons de travailler non pas à partir des déformations, mais plutôt à partir des incréments de ces dernières correspondant aux incréments de charge imposés. La linéarité de la loi élastique (modules d'Young constants) entraîne que les équations précédentes sont aussi valables pour les incréments de déformation.

Les difficultés rencontrées lors de la mise en place des jauges à l'intérieur du coussinet, dues entre autres au faible rayon de courbure imposé aux jauges et au manque de place évident pour aligner sept jauges consécutives sur un coussinet de diamètre égal à 52 mm environ, nous ont conduit à nous assurer de la validité des déformations lues du fait d'un éventuel mauvais collage ou même d'un désaxement des jauges. Plusieurs possibilités de vérification sont en fait disponibles. Durant toute cette approche, nous n'avons jamais utilisé les déplacements en tête du coussinet pourtant connus par le biais du comparateur. C'est pourquoi nous choisissons la confrontation des incréments de déplacement mesurés à ceux obtenus par interpolation linéaire des incréments de déformations le long du coussinet durant les périodes de charge puis de décharge :

$$\Delta u_{calc} = \int_0^\pi R \Delta \varepsilon_\theta d\theta \quad (2.47)$$

avec  $R$  le rayon du coussinet.

On retrouve cette comparaison des déplacements mesurés et calculés sur la figure 2.17 :

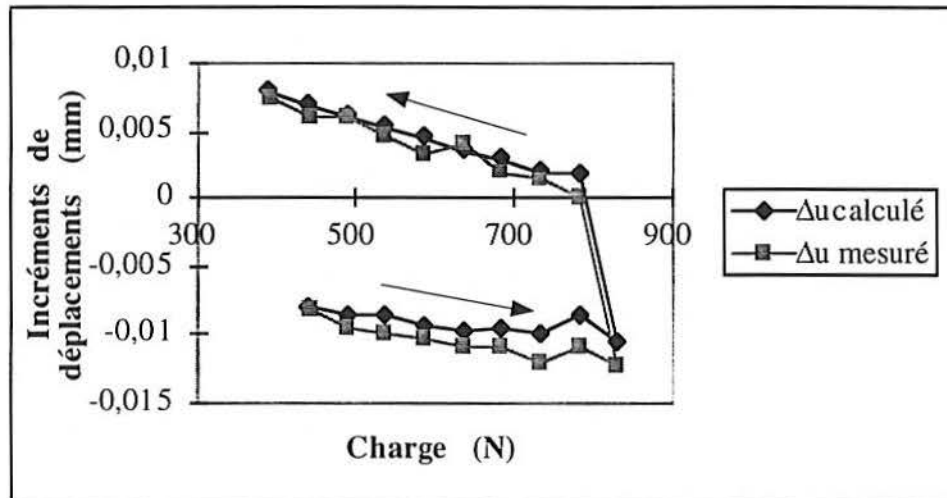


Figure 2.17 : Comparaison des incréments de déplacements en fonction de la charge imposée

Cette comparaison étant satisfaisante, nous pouvons affirmer que le comportement global des jauges est satisfaisant, et que nous pouvons sans problèmes le reprendre pour la détermination du coefficient de frottement.

Comme nous l'avons réalisé précédemment avec les déformations obtenues avec le calcul MEF, nous représentons sur la figure 2.18 les déformations obtenues le long du coussinet pour différentes valeurs du chargement imposé notées ici en MPa.

*Remarque : il s'agit bien ici de déformations et non d'incrément de déformation, avec une remise à zéro de leur valeur après la mise en place du coussinet dans son berceau.*

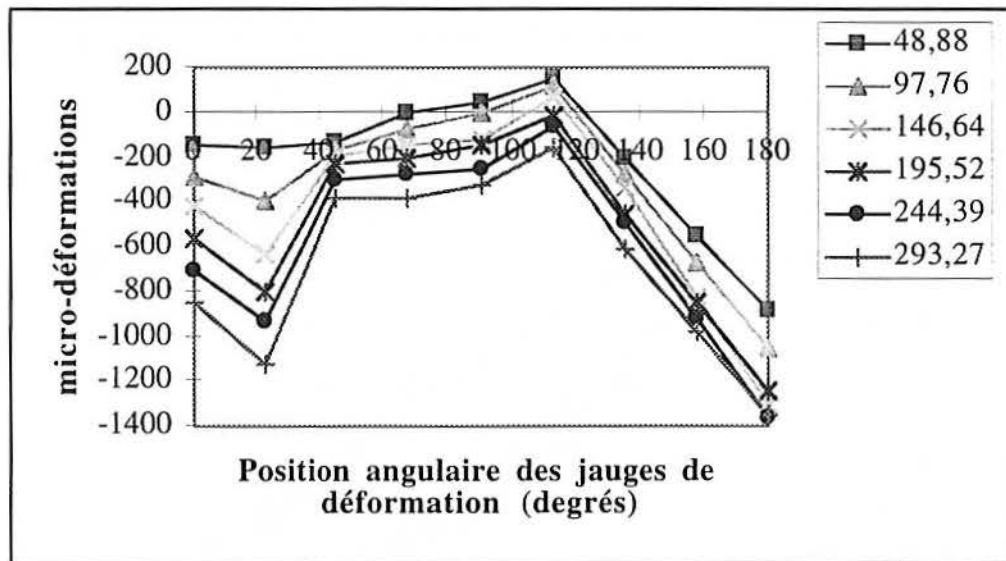


Figure 2.18 : Déformations le long du coussinet pour différentes valeurs de chargement

On peut cette fois-ci, noter le bon comportement individuel des jauges de déformation par comparaison avec la figure 2.16.

Comme nous l'avons fait pour le tableau 2.4, nous portons dans le tableau 2.5 les valeurs du coefficient de frottement obtenues à l'aide des méthodes analytiques, toujours en considérant tour à tour une distribution constante de la pression normale de contact sur chaque tronçon du coussinet, puis une distribution affine.

$\mu = f(p_r)$ $p_r$ constant	$\mu = f(p_r)$ $p_r$ affine
0,183	0,222

Tableau 2.5 : Coefficients de frottement calculés

Ces résultats sont du même ordre que ceux trouvés à partir des résultats MEF. Compte tenu d'une marge de 10% d'erreur telle qu'on l'a vu précédemment, il est raisonnable de retenir la valeur de 0,2 pour le coefficient de frottement.

On peut désormais approcher numériquement la perte de longueur développée, due au frottement, du coussinet dans son berceau de contrôle lorsque celui-ci est mis en compression puis relâché pendant la procédure de mesure. Ceci nous permet de valider les hypothèses faites sur le frottement telles qu'on les a définies plus haut. Sur la figure 2.19 sont représentés les déplacements calculés et mesurés exprimés en micromètres en fonction de la force imposée, exprimée en Newtons. Pour des raisons liées à la procédure expérimentale, le déplacement n'est mesuré qu'à partir de l'application d'une force initiale



de l'ordre de 2000 N. On observe que le déplacement varie linéairement avec la charge, mais présente un comportement nettement différent lors de la décharge.

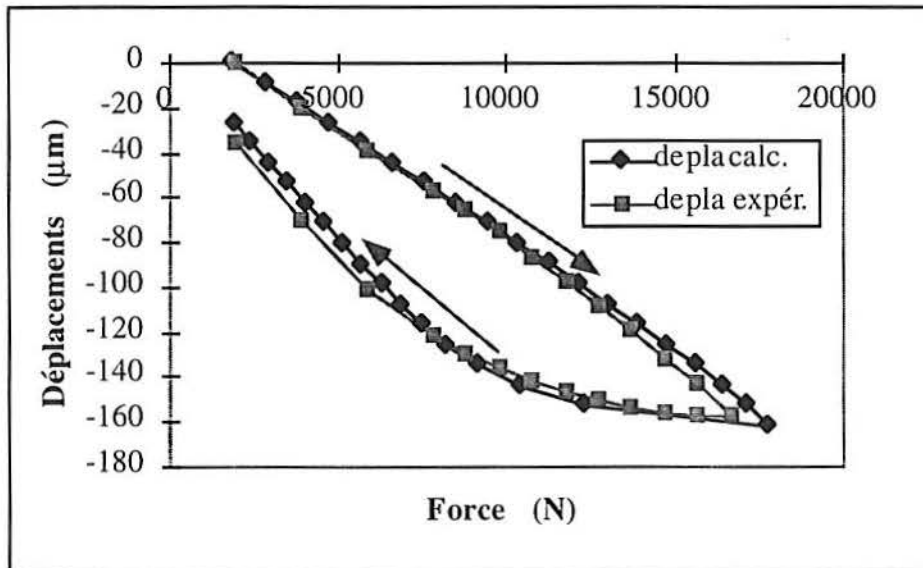


Figure 2.19 : Mesure de tassement du coussinet - charge et décharge

Cette hystérésis est due au retour progressif des points situés sur la surface de contact du fait des conditions de frottement. Elle correspond au temps nécessaire aux pressions tangentielles de contact situées en ces points pour changer de signe, et à être suffisamment élevées pour retrouver le seuil de glissement du critère de Coulomb opposé à celui suivi au cours de la charge (Cf. figure 2.9).

Ces résultats paraissent tout à fait satisfaisants, mais rien ne nous permet d'affirmer que le frottement réel répond bien au critère de Coulomb, même s'il reste le modèle le plus couramment utilisé lors de frottement métal-métal. De plus, certains travaux ont montré que le coefficient de frottement est non seulement fonction de la vitesse de glissement, mais aussi de la pression de contact exercée [64]. Il pourrait donc varier le long du coussinet, ainsi qu'avec la charge imposée. Notre approche analytique du frottement basée sur la seule connaissance des déformations sur la surface interne du coussinet, si elle paraît satisfaisante, n'en est pas moins insuffisante. La meilleure façon de procéder serait sans nul doute la connaissance directe des pressions de contact au dos du coussinet.



## I. Mesure des contraintes à l'interface

### 2.9.1 Principe

L'idée de base repose sur une utilisation pertinente de capteurs piézoélectriques. Pour rappel, la piézoélectricité est le phénomène de polarisation induite par une déformation mécanique dans certains cristaux, cette polarisation étant proportionnelle à la déformation et changeant de signe avec elle.

La matrice  $[d]$  des coefficients piézoélectriques, traduit la proportionnalité entre la charge électrique et la contrainte à champ constant.

Utiliser des mini-tubes en céramique PZT judicieusement placés nous permettrait d'avoir des informations sur ce qui se passe à l'interface localement, et ceci sans que la mesure ne perturbe trop le fonctionnement du dit interface. Les dimensions de ces tubes (longueur 25,4mm, diamètre extérieur 1,27mm, intérieur 1,21mm) et les caractéristiques élastiques (module d'Young de 87 GPa environ) sont compatibles avec cet objectif.

Chacun de ces tubes est métallisé à l'intérieur et à l'extérieur ; polarisés de ce fait radialement, ils sont des capteurs sensibles par construction à la seule pression moyenne à laquelle ils sont soumis : ceci a été soigneusement vérifié avec Ansys (code de calcul à éléments piézo), mais aussi avec un code du laboratoire lui autorisant la déformation plane généralisée. Associés à une matrice polymère, ces mini-tubes permettraient enfin d'avoir une mesure locale peu perturbante de la contrainte normale, contrainte dont on vient de voir l'importance. Il suffit alors d'intégrer le système tube piézoélectrique-matrice au berceau tel qu'il est représenté sur la figure 2.19.

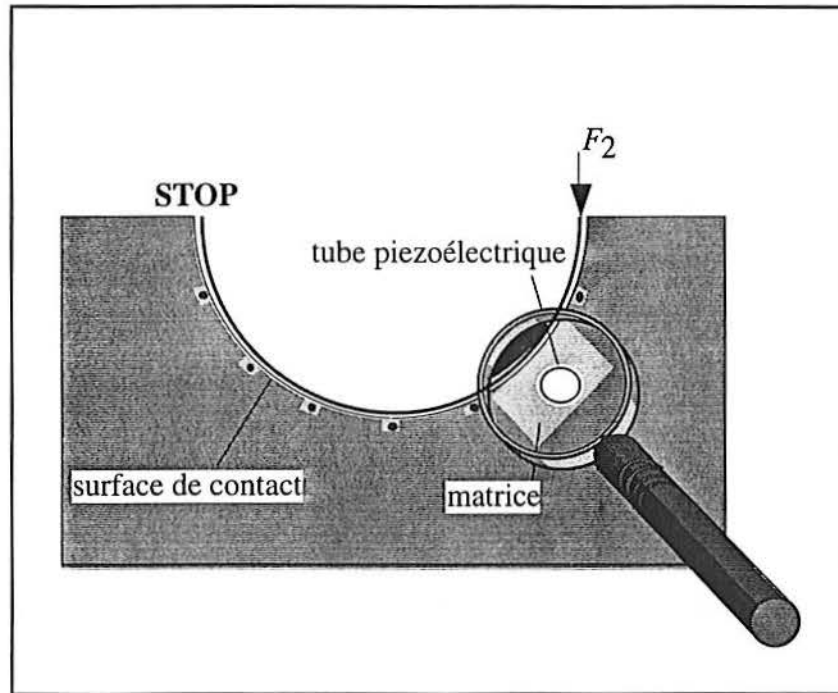


Figure 2.19 : Mesure in-situ des contraintes normales

Les tubes piézoélectriques étant polarisés radialement, et soumis à une pression hydrostatique, la polarisation est caractérisée simplement par un coefficient de charge hydrostatique noté  $d_h$ .

Il est bien sûr possible d'associer ces mesures à celles issues des jauges de déformation, puis de corrélérer les résultats.

### 2.9.2 Matériel d'essai

Avec l'aide du Laboratoire de Génie Electrique et Ferroélectricité de l'INSA-Lyon et de Glacier Vandervell nous avons réalisé une cellule de test constituée d'un ensemble cylindre-piston. Le mini-tube immergé dans une huile isolante peut ainsi être soumis à une pression hydrostatique. La charge résultante, fonction de la pression imposée, est ensuite mesurée par l'intermédiaire d'un amplificateur de charges (Fig. 2.20).

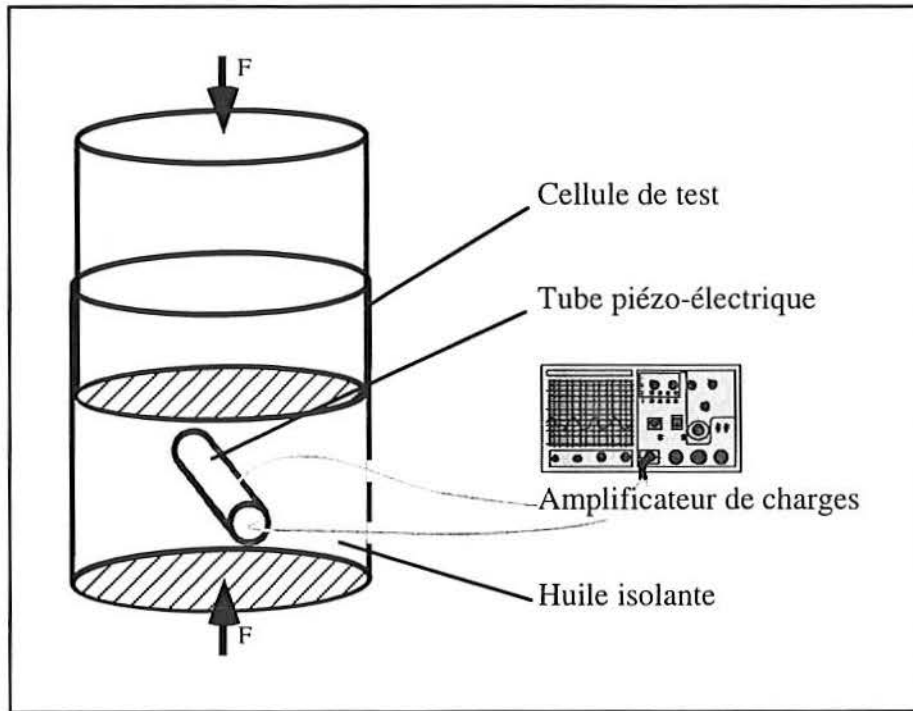


Figure 2.20 : Etalonnage du tube piézoélectrique

Nous avons donc étalonné ces tubes pour imposer une contrainte garantie, et l'on retire une mesure du  $d_h$ , le coefficient de charge hydrostatatique qui caractérise la réponse électrique en fonction de la pression hydrostatatique, représentée sur la figure 2.21 :

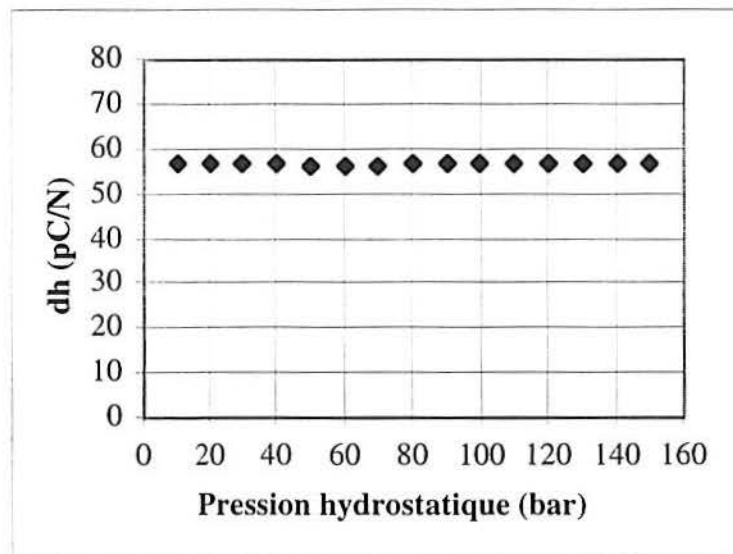


Figure 2.21 : Mesure du coefficient de charge hydrostatatique

On note une parfaite constance de la valeur du  $d_h$  en fonction de la charge, et on peut alors en conclure une très bonne linéarité des charges électriques recueillies en fonction de

la pression.

Une fois testés pour imposer une déformation garantie, et non une contrainte comme ci-dessus, il nous reste à définir la matrice polymère destinée à les enrober dans leur logement de test, mais ces travaux dépassent le cadre de cette étude.

## 2.10 Conclusion

Nous avons pu souligner dans ce chapitre l'intérêt que peut présenter une approche analytique associée à des essais expérimentaux adaptés, pour l'évaluation du coefficient de frottement. Ces essais présentent en outre l'avantage d'être les plus proches possible des conditions réelles de fabrication des coussinets. Le travail et les résultats peuvent être résumés en fonction des étapes suivies :

### - Validation de l'outil de travail

Nous avons réalisé au cours de ce chapitre une comparaison entre des résultats de calculs obtenus par un logiciel d'éléments finis et un autre code développé au laboratoire. Elle a permis de valider les simulations de contact avec frottement entre le coussinet et son berceau de contrôle pour les deux logiciels. Cette première étape est essentielle, car elle nous assure la bonne fiabilité du logiciel industriel qui est l'un des outils majeurs pour la suite de cette étude.

### - Détermination du coefficient de frottement

Une fois la maîtrise du logiciel parfaitement acquise pour de telles applications, nous avons utilisé cet instrument de travail pour développer un nouveau modèle analytique pour la détermination du coefficient de frottement. La pertinence de cette approche est justifiée après confrontation du coefficient solution du modèle appliqué à des résultats de calculs MEF, et à des mesures expérimentales. Cette démarche de travail a permis la détermination du vrai coefficient de frottement à l'interface du coussinet et du berceau employé, et par la suite de simuler correctement les mesures de longueur développée.

### - Analyse de mesure de longueur développée

Les essais expérimentaux de compression du coussinet, leurs simulations numériques ainsi que leurs modélisations analytiques effectuées en parallèle permettent la révélation de deux étapes essentielles se succédant au cours de l'opération de contrôle :

- en début de mise en charge de la tête du coussinet, le rayon de courbure de ce dernier n'est pas constant sur toute la longueur. Ainsi le contact ne survient pas sur toute la surface du coussinet en vis à vis avec le berceau ;

- dans un deuxième temps, le contact est assuré partout sur la surface. L'utilisation du modèle analytique est possible dans cette situation.

Les conséquences de ces deux étapes lors de l'opération de contrôle portent tout particulièrement sur la distribution des déformations dans le coussinet. On s'attendait, en effet, à une répartition monotone des déformations sur la longueur de la pièce alors que celle-ci donne un minima de déformation au centre du coussinet. La présence d'extremum près des extrémités du coussinet peut ainsi influencer sur une plastification possible du coussinet dans ces zones. Les effets peuvent être particulièrement importants et méritent d'être étudiés pour l'optimisation de la mise en forme.

La simulation des mesures de longueurs développées a permis la mise en évidence de l'hystérésis, due au frottement, apparaissant lors du relâchement du coussinet après que ce dernier a été préalablement mis en compression dans son logement. Une bonne connaissance du comportement en frottement du coussinet dans son logement s'avère nécessaire pour mieux étudier ses phases de fabrication durant lesquelles il est soumis au même type de contact avec des berceaux appelés coquilles de cambrage ou coquille de conformation. Cet outil analytique présente non seulement une aide à la résolution de notre problème, mais peut aussi être utilisé pour simuler le comportement d'un coussinet en service, si toutefois les conditions de contact nécessaires à l'application du modèle sont réunies.

### - Bilan des corrélations calculs / mesures

Les corrélations calculs/mesures montrent que les approches présentées au cours de ce chapitre ainsi que les hypothèses de travail retenues s'avèrent suffisamment fines pour avoir la meilleure correspondance possible avec les essais expérimentaux réalisés. Ainsi dans le cas d'un contact rugueux, le coefficient de frottement a été estimé à 0,2

**- Recommandations**

Dans le cas où le logement du coussinet et le coussinet sont partout en contact, les modèles analytiques peuvent être utilisés pour prédire les contraintes normales sur une section du coussinet.

L'utilisation des simulations de mesures peut permettre de définir la limite d'élasticité en compression du matériau.

**- Nouveau capteur**

Une amélioration possible de ce travail et une application nouvelle est celle des capteurs piézoélectriques en cours de développement pour une meilleure connaissance du type de frottement tout du long du coussinet, ainsi que pour le suivi de la fabrication et le contrôle des coussinets. Une application plus audacieuse encore, mais certainement digne d'intérêt, concerne les mesures in-situ dans le moteur, tels les paliers de ligne d'arbre des vilebrequins par exemple.

# Chapitre 3

## Mise en forme élastoplastique du coussinet

### 3.1 Introduction

L'étude de la mise en forme, cette fois en élastoplasticité avec frottement, du coussinet à partir de la plaque originelle est réalisée avec Systus+, pour tenir compte des grands déplacements et des grandes déformations, avec remaillage de la structure.

On distingue deux étapes essentielles de la mise en forme d'un coussinet. Une bande d'acier revêtue d'une couche d'alliage d'aluminium antifriction subit d'abord un « cambrage » (Fig. 3.1), opération ainsi appelée par les fabricants de coussinets correspondant à une mise en flexion, puis dans un deuxième temps une étape de « conformation » (Fig. 3.2) donnant la forme finale à la pièce, par tassement de la pièce dans une matrice. Nous nous plaçons comme plus haut dans le chapitre 2 en déformation plane.

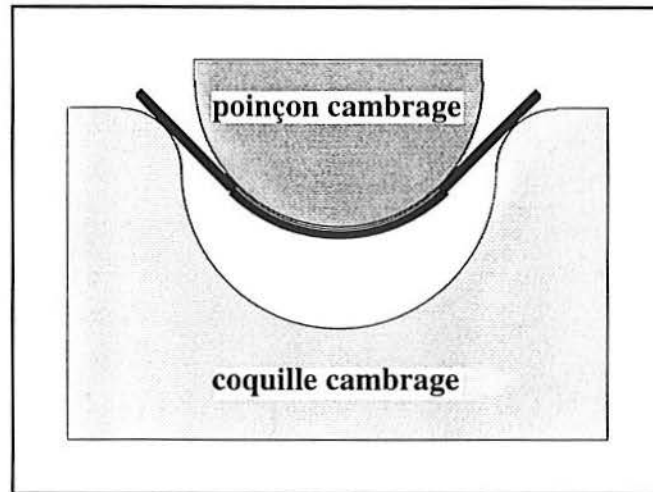


Figure 3.1 : Phase de cambrage

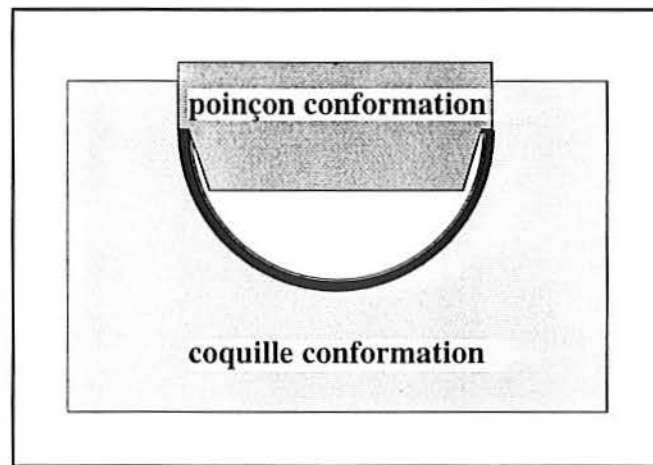


Figure 3.2 : Phase de conformation

Les non-linéarités induites lors de tels calculs sont de plusieurs natures. Les lois de comportement des matériaux sont non-linéaires parce qu'élastoplastiques (non linéarité matérielle). Elles sont aussi non-linéaires du fait des grandes déformations et des grands déplacements (non linéarité géométrique). Enfin la structure est soumise à des conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement (non linéarité matérielle et géométrique). Nous verrons dans une première partie de ce chapitre la méthode de résolution de ces problèmes non-linéaires adoptée.

A la suite de cette présentation théorique, seront étudiées les différentes phases de comportement du coussinet pendant les étapes de fabrication subies. Avec la même philosophie de travail que celle adoptée au cours des chapitres précédents, nous chercherons à justifier les observations tirées de ces calculs par éléments finis à l'aide d'une démarche RDM simplificatrice mais convaincante.



Enfin les résultats obtenus seront confrontés aux observations expérimentales réalisées en cours et en fin de fabrication du coussinet afin de tirer les conclusions de cette étude. Ces vérifications portent essentiellement sur des caractéristiques géométriques du coussinet prises aux étapes d'élaborations.

## 3.2 Présentation des méthodes utilisées sous Systus+

### 3.2.1 Analyse statique non linéaire : généralités

Une analyse statique est non linéaire dans les cas suivants :

- La loi de comportement du matériau est non-linéaire
  - élasticité non linéaire
  - loi de comportement élastoplastique
  - fluage...
- La relation entre déformations et déplacements n'est pas linéaire : cas des grandes déformations et des grands déplacements.
- La structure est soumise à des conditions de contact unilatéraux avec ou sans frottement.

La résolution de tels problèmes se fera par une méthode incrémentale et itérative dont nous présenterons les grandes lignes en 3.2.7.

### 3.2.2 Elastoplasticité

#### Hypothèses et principes

L'expérience montre qu'il existe dans l'espace des contraintes, un domaine convexe, appelé domaine d'élasticité, tel que tout trajet de chargement intérieur à ce domaine ne produit que des déformations élastiques. Ce domaine est défini à partir d'une fonction à valeur scalaire  $F$  appelée fonction seuil ou critère de plasticité  $F(\sigma_{ij})$  :

$$F(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (3.1)$$

Si un état de contrainte, supposé élastique, atteint la frontière de domaine, alors des déformations plastiques se produisent de sorte que l'état de contrainte vérifie :

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.2)$$

L'équation ci-dessus définit la surface seuil dans l'espace des contraintes.

La déformation totale est décomposée (hypothèse de partition de la déformation totale) en :

- une déformation élastique,
- une déformation plastique.

soit sous forme incrémentale :

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (3.3)$$

L'existence d'un potentiel plastique (principe du travail plastique maximal de Hill) conduit à formuler l'hypothèse de normalité, ou loi associée, et donc, à écrire :

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.4)$$

pour la plasticité associée au critère  $F = 0$ .

En écrivant :

$$\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij} = K_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl} + \underbrace{\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^p}_{\Delta \varepsilon_{kl}^e} \right) \quad (3.5)$$

le scalaire  $\Delta \lambda$  peut être obtenu en résolvant l'équation de consistance :

$$F \left( K_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl}^e + \Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right) \right) = 0 \quad (3.6)$$

### Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises particulièrement adapté au comportement des matériaux métalliques ductiles, s'écrit :

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_{eq} - k \quad (3.7)$$

où  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente de Von Mises et  $k$  est la contrainte limite ou limite d'élasticité.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (3.8)$$

où les  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les contraintes principales. On définit aussi la contrainte moyenne :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.9)$$

La surface seuil de Von Mises est représentée, dans l'espace des contraintes principales, par un cylindre ayant pour axe la trissectrice du repère, et pour rayon  $\sqrt{\frac{2}{3}} k$  (Fig. 3.3).

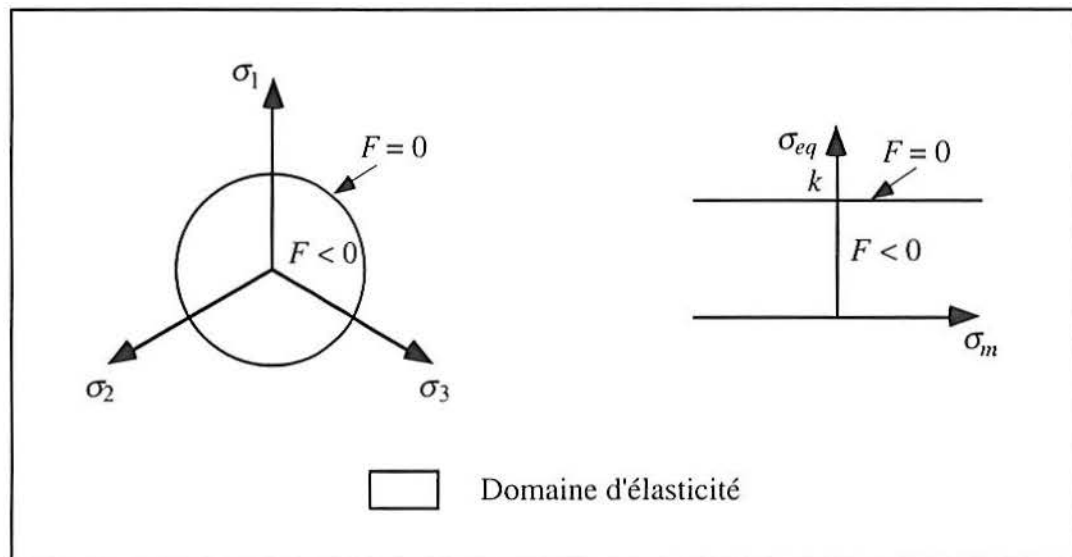


Figure 3.3 : Critère de Von Mises

Le plan orthogonal à la trissectrice dans l'espace des contraintes principales est appelé le plan du déviateur.

Les matériaux qui suivent le critère de Von Mises vérifient :

$$\varepsilon_m^p = 0 \quad (3.10)$$

c'est-à-dire que la déformation plastique n'engendre pas de variation de volume. On a donc :

$$\varepsilon'^p = \varepsilon^p \quad (3.11)$$

$\varepsilon'^p$  étant le déviateur du tenseur  $\varepsilon^p$ .

C'est ce critère qui est retenu pour chacun des matériaux constituant le coussinet. La loi élastoplastique avec écrouissage est précisée à l'aide d'essais de traction simple sur éprouvettes découpées dans ces matériaux, faute de machine biaxiale disponible. Les matériaux sont supposés isotropes et à l'état neutre ; en effet l'anisotropie induite par le mode d'élaboration des bandes d'acier utilisées reste faible, plusieurs essais de traction simple réalisés par Glacier-Vandervell sur des bandes d'acier prélevées dans différentes directions ont confirmé que le caractère isotrope du comportement du matériau était peu sensible à l'histoire des sollicitations subies. De plus, des figures prises au MEB par Glacier-Vandervell du revêtement antifriction montrent une bonne similitude de la répartition géométrique des composants de l'alliage pour différentes normales de sections. A cela, on peut ajouter qu'une recristallisation à 250-300°C permet d'éliminer les contraintes résiduelles de l'alliage Al-Sn.

### Ecrouissage

Les matériaux qui obéissent au critère de Von Mises vérifient l'incompressibilité. En pratique, en présence d'une déformation plastique, le domaine d'élasticité évolue. Ce phénomène est appelé écrouissage du matériau. Le critère de plasticité dépend alors d'autres variables internes du matériau :

$$F = F(\sigma_{ij}, \chi_{ij}, \varepsilon_{eq}^p) \quad (3.12)$$

On dispose dans Systus+ de deux types d'écrouissage :

- l'écrouissage *isotrope* qui correspond à une dilatation homothétique du domaine d'élasticité (Fig. 3.4)

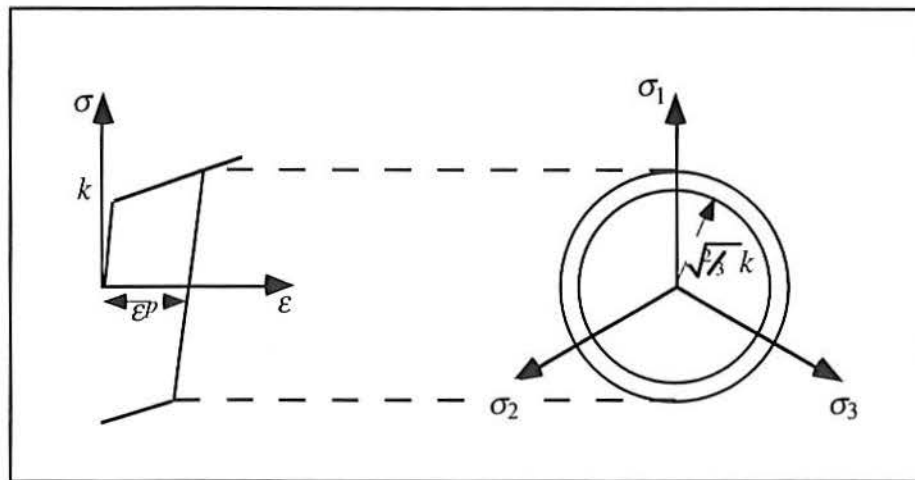


Figure 3.4 : Ecrouissage isotrope

La dilatation du domaine d'élasticité est gouvernée, dans le cas du critère de Von Mises, par la variable interne scalaire  $\varepsilon_{eq}^p$  qui correspond à la déformation plastique équivalente cumulée :

$$\varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt \quad (3.13)$$

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad (3.14)$$

- l'écrouissage cinématique qui correspond à une translation du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes (Fig. 3.5) :

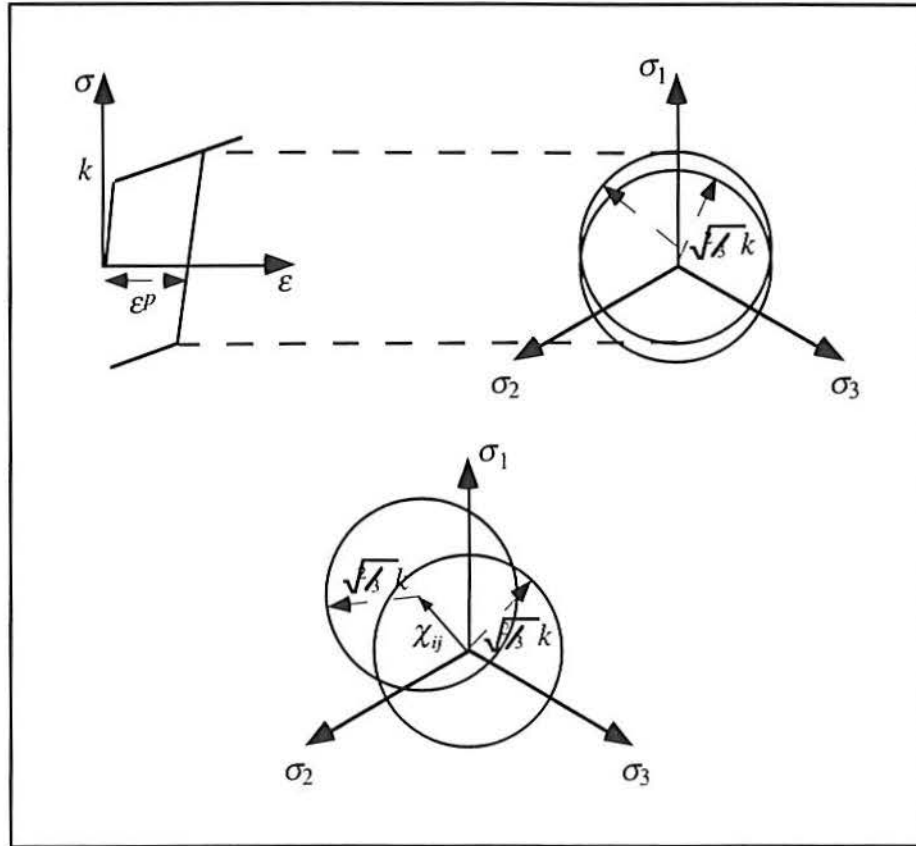


Figure 3.5 : Ecroissage cinématique

Le déplacement du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes est représenté par la variable interne tensorielle de composantes  $\chi_{ij}$ .

Les modèles à écroissage cinématique permettent de représenter l'effet Baushinger (différence de comportement en traction - compression) et sont, en conséquence, recommandés pour les applications cycliques.

Plusieurs modèles d'écroissage cinématique sont disponibles, mais nous ne retiendrons dans cette étude que le modèle d'écroissage cinématique linéaire de Prager, qui s'écrit ainsi :

$$F(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = f(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) - k = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma'_{ij} - \chi'_{ij}) (\sigma'_{ij} - \chi'_{ij}) - k \quad (3.15)$$

$$\text{avec } \chi_{ij} = \frac{2}{3} c(\theta) \varepsilon_{ij}^p$$

Le scalaire  $c$  représente la pente d'écroissage.

La difficulté de déterminer expérimentalement le type d'écroissage de nos matériaux nous a conduit à ne retenir et à n'utiliser que le seul écroissage cinématique pour mener

nos calculs. Ce type d'écroissage est aussi couramment utilisé pour l'étude de métaux tels que les aciers doux ou les alliages d'aluminium. Enfin, la confrontation des résultats obtenus numériquement à ceux obtenus sur des coussinets issus de la presse de mise en forme montre que ce choix est raisonnable.

Les courbes d'écroissage utilisées sont obtenues par essais de traction sur des éprouvettes d'acier et d'alliage tels que ceux présentés au chapitre 1.

### **Numérisation de la plasticité**

Dans SYSTUS+ les équations de la plasticité sont discrétisées en utilisant une méthode dite « implicite ».

Soit  $A$  le point représentatif de l'état des contraintes à l'instant  $t$ , dans l'espace des contraintes ou sur la courbe rationnelle de traction. Cet état de contrainte peut être de nature élastique ou plastique. Nous devons calculer le nouvel état de contraintes à l'instant  $t + \Delta t$ , représenté par le point  $C$ . Pour cela nous procédons en deux étapes, représentées figure 3.6 :

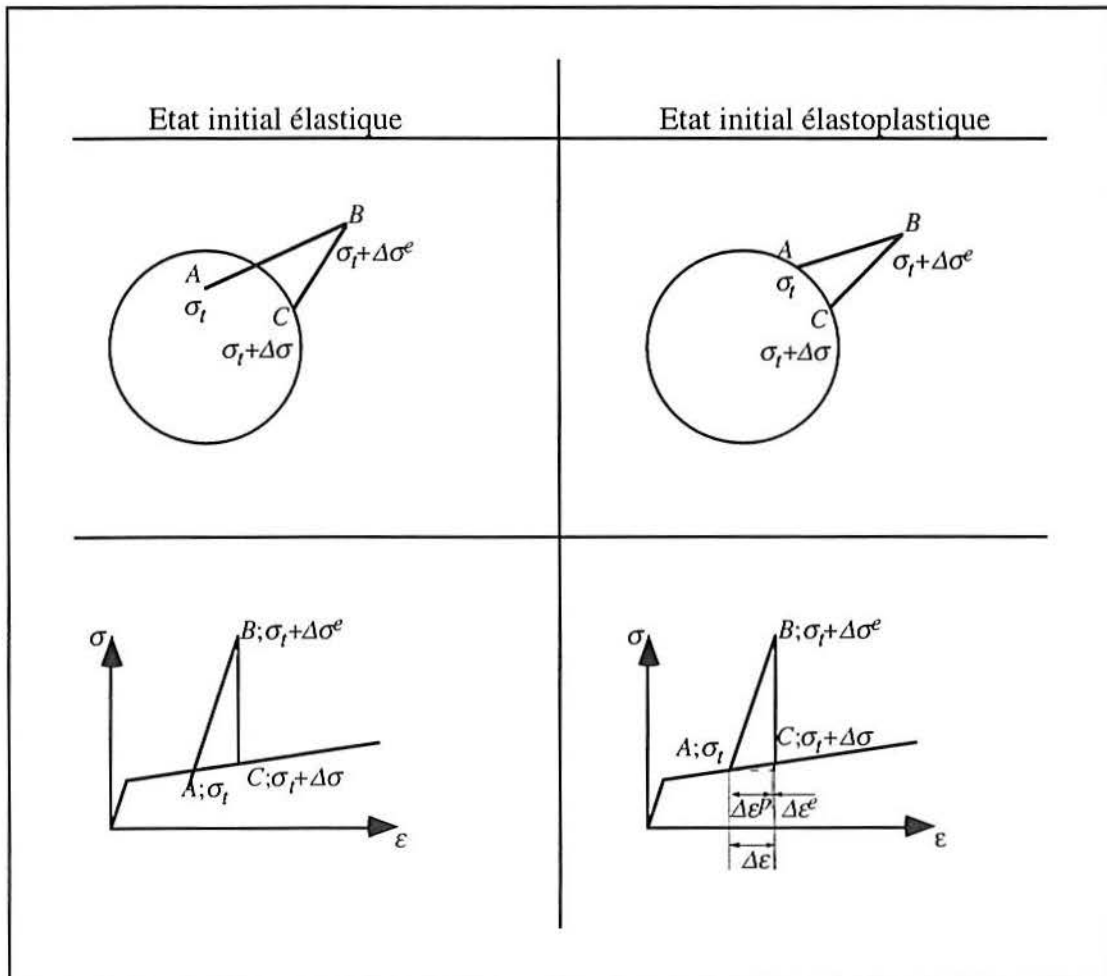


Figure 3.6 : Principe de la discrétisation des équations de la plasticité

On distingue donc :

- une étape de calcul élastique. Un calcul élastique préliminaire permet d'obtenir une approximation de l'état de contraintes cherché (point  $B$ ) : les contraintes obtenues satisfont l'équilibre de la structure à  $t + \Delta t$ , mais ne respectent pas le critère de plasticité. Le vecteur incrément de déformation  $\Delta \epsilon$  obtenu entre  $t$  et  $t + \Delta t$  est alors élastique.

- une étape de correction élastoplastique. L'état de contrainte précédent est corrigé de façon à satisfaire le critère de plasticité, nous obtenons alors le point  $C$ . L'incrément de déformation obtenu à l'étape précédente est alors réparti en une composante élastique  $\Delta \epsilon^e$  et une composante plastique  $\Delta \epsilon^p$ . L'organigramme de la méthode est présentée sur la figure 3.7 ci-dessous :



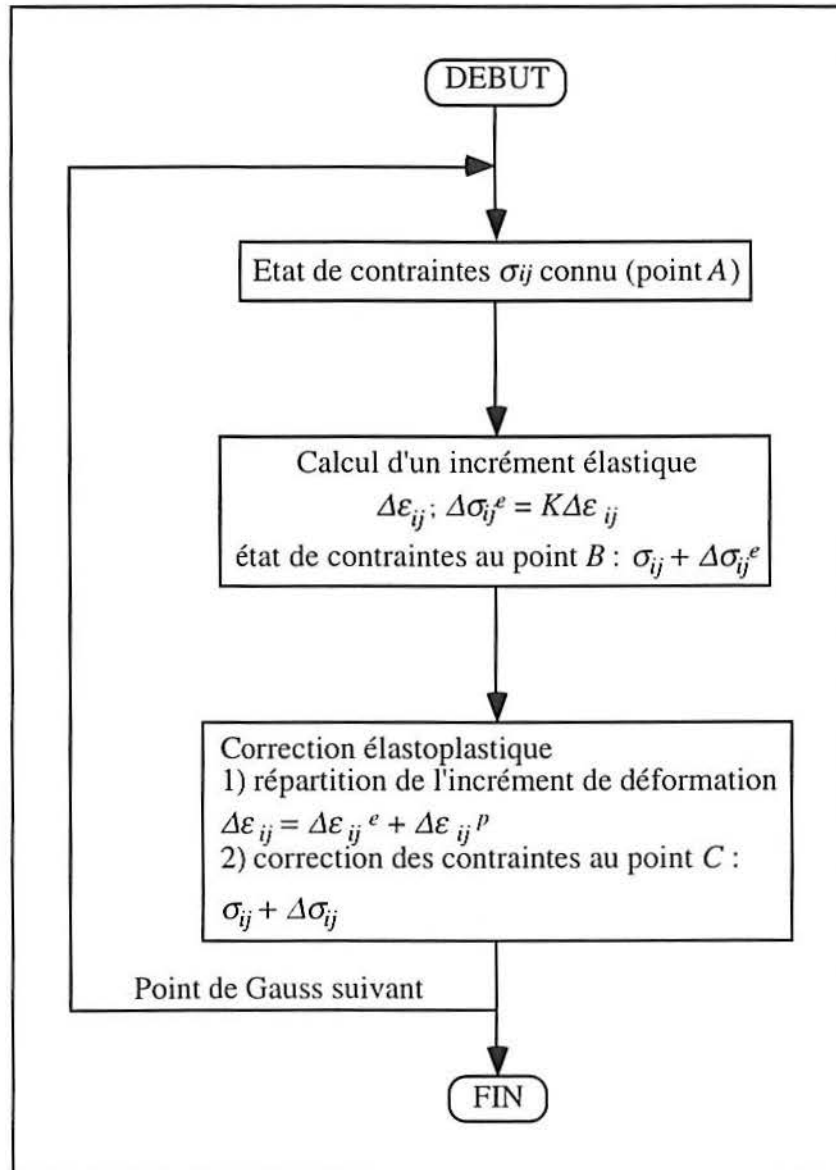


Figure 3.7 : Organigramme général de la méthode de correction élastoplastique

La méthode implicite suppose les états de contraintes  $A$  et  $B$  connus, elle conduit à former les équations utilisables pour accomplir l'étape de correction élastoplastique. Elle consiste à écrire :

- que le critère de plasticité est satisfait au point  $C$  :

$$F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.16)$$

- que le vecteur incrément de déformation plastique  $\Delta\varepsilon^p$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  est parallèle à la normale au point inconnu  $C$  :

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \quad (3.17)$$

On notera que le point  $C$  obtenu n'est pas statistiquement admissible, il sera nécessaire d'avoir recours par la suite à un processus itératif pour obtenir, après convergence du processus, une solution qui soit à la fois plastiquement et cinématiquement admissible. La méthode itérative est ici la méthode de Newton-Raphson.

### 3.2.3 Grands déplacements et grandes rotations

SYSTUS+ propose deux formulations pour traiter les grands déplacements et grandes déformations des structures.

La formulation Lagrangienne totale résout les équations d'équilibre dans la configuration initiale (non déformée)  $C_0$ . Elle utilise les tenseurs des contraintes et des déformations définis dans cette configuration :

- le deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff dans  $C_0$ ,
- le tenseur des déformations de Green-Lagrange dans  $C_0$ .

Cette formulation est adaptée aux grands déplacements et grandes déformations élastiques ou hyperélastiques des structures.

La formulation quasi-Eulerienne, ou Lagrangienne actualisée modifiée, résout les équations d'équilibre dans la configuration déformée actuelle  $C_{t+\Delta t}$ . Elle utilise :

- le tenseur des contraintes de Cauchy,
- le tenseur taux de déformations.

Cette formulation nécessite l'utilisation d'une dérivée objective du tenseur des contraintes. SYSTUS+ utilise la dérivée de Green-Naghdi qui, par rapport à la dérivée de Jauman, améliore le comportement en cisaillement (Cf. [65]).

Cette formulation sera retenue, car elle est la mieux adaptée aux grands déplacements et grandes déformations élastiques ou élastoplastiques des structures.

#### **Formulation en Lagrangien actualisé : Principes généraux et milieux continus**

Dans ce paragraphe sont présentés les principes généraux de la formulation en Lagrangien actualisé utilisée en donnant l'expression de la loi de comportement et en écrivant les équations d'équilibre de la structure.

Loi de comportement

La loi de comportement est de type hypoélastique. Elle relie le taux de variation des contraintes par rapport au temps au taux de variations des déformations.

Le taux de variation des déformations est donné par le tenseur vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}^{(t)}$ . Celui-ci constitue la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse  $L^{(t)}$  :

$$\dot{\varepsilon}^{(t)} = \frac{1}{2} (L^{(t)} + {}^T L^{(t)}) \quad (3.18)$$

avec  $L^{(t)} = (L_{ij}^{(t)})$  ;  $L_{ij}^{(t)} = \frac{\partial \dot{u}_i^{(t)}}{\partial x_j^{(t)}}$

et  $\dot{\varepsilon}^{(t)} = (\dot{\varepsilon}_{ij}^{(t)})$  ;  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(t)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i^{(t)}}{\partial x_j^{(t)}} + \frac{\partial \dot{u}_j^{(t)}}{\partial x_i^{(t)}} \right)$

La dérivée convective du tenseur des contraintes de Cauchy, notée  $\dot{\sigma}$  permet de mesurer le taux de variation des contraintes :

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma} - L^{(t)} \sigma^{(t)} - \sigma^{(t)} {}^T L^{(t)} \quad (3.19)$$

La loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$\dot{\sigma} = K \dot{\varepsilon} \quad (3.20)$$

$K$  est la matrice d'élasticité.

La discrétisation des relations du comportement permet d'exprimer la variation du tenseur des contraintes de Cauchy  $\Delta\sigma$  entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  en fonction de la variation du tenseur des déformations  $\Delta\varepsilon$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  ; ces variations sont définies par :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \sigma^{(t+\Delta t)} - \sigma^{(t)} \\ \Delta\varepsilon &= \varepsilon^{(t+\Delta t)} - \varepsilon^{(t)} \quad \text{dont les composantes s' écrivent :} \\ \Delta\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j^{(t+\Delta t)}} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i^{(t+\Delta t)}} \right) \\ \text{où} \quad \Delta u_i &= u_i^{(t+\Delta t)} - u_i^{(t)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'incrément de contrainte  $\Delta\sigma$  est défini par rapport à la configuration précédente  $C_t$ .  
La discrétisation des relations de comportement conduit à la relation :

$$\Delta\sigma = K \Delta\varepsilon + 2 G \sigma^{(t)} \quad (3.22)$$

où le produit  $2 G \sigma^{(t)}$  provient des termes  $L \sigma$  et  $\sigma^T L$  qui interviennent dans l'expression de la dérivée convective.

On obtient ainsi le tenseur des contraintes de Cauchy défini à l'instant  $t + \Delta t$  dans la configuration  $C_{t+\Delta t}$  :

$$\sigma^{(t+\Delta t)} = \sigma^{(t)} + \Delta\sigma \quad (3.23)$$

pour obtenir son expression dans la configuration actuelle  $C_{t+\Delta t}$  nous appliquons la relation :

$$\sigma'^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{\det F} F \sigma^{(t+\Delta t)} {}^T F \quad (3.24)$$

où  $\sigma'$  est le tenseur de contraintes effectives de Cauchy, et  $F$  est le tenseur gradient de la transformation ou tenseur jacobien de  $C_t$  à  $C_{t+\Delta t}$ .

### Les équations d'équilibre

La résolution des équations d'équilibre est basée sur les principes suivants :

- connaissant la solution à l'instant  $t$  (déplacements géométrie  $C_t$ , contraintes...) on recherche la solution à l'instant  $t + \Delta t$  (nouvelle géométrie, contraintes...),
- on résout les équations d'équilibre à l'instant  $t + \Delta t$  écrites dans la configuration inconnue  $C_{t+\Delta t}$ .

En appliquant le principe des travaux virtuels dans la configuration  $C_{t+\Delta t}$  et en imposant un déplacement virtuel  $\{\delta U\}$  nous obtenons :

$$\int_{V(t+\Delta t)} {}^T \delta\varepsilon \sigma^{(t+\Delta t)} dV = \int_{V(t+\Delta t)} {}^T \delta U f^{(t+\Delta t)} dV + \int_{S(t+\Delta t)} {}^T \delta U p^{(t+\Delta t)} dS \quad (3.25)$$

La discrétisation de la structure en éléments finis conduit à :

$$\delta u = N \delta U \quad (3.26)$$

où  $N$  est la matrice d'interpolation, et

$$\delta \varepsilon = B^{(t+\Delta t)} \delta u \quad (3.27)$$

On notera que la matrice  $B^{(t+\Delta t)}$  reliant déformations et déplacements est exprimée dans la configuration  $C_{t+\Delta t}$ .

En reportant les relations (3.26) et (3.27) dans (3.25) on obtient :

$${}^T \delta U \int_{V^{(t+\Delta t)}} {}^T B^{(t+\Delta t)} \sigma^{(t+\Delta t)} dV - \int_{V^{(t+\Delta t)}} {}^T N f^{(t+\Delta t)} dV - \int_{S^{(t+\Delta t)}} {}^T N p^{(t+\Delta t)} dS = 0 \quad (3.28)$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit le déplacement virtuel  $\delta U$ , on en déduit les équations d'équilibre de la structure sous forme matricielle, à  $t + \Delta t$  :

$$\Psi^{(t+\Delta t)} = \int_{V^{(t+\Delta t)}} {}^T B^{(t+\Delta t)} \sigma^{(t+\Delta t)} dV - F_{t+\Delta t} = 0 \quad (3.29)$$

$\Psi^{(t+\Delta t)}$  est le vecteur déséquilibre à l'instant  $t + \Delta t$  et :

$$F^{(t+\Delta t)} = \int_{V^{(t+\Delta t)}} {}^T N f^{(t+\Delta t)} dV + \int_{S^{(t+\Delta t)}} {}^T N p^{(t+\Delta t)} dS \quad (3.30)$$

est appelé « vecteur contribution des forces extérieures ».

Comme la géométrie à  $t + \Delta t$  est fonction des déplacements inconnus  $u^{(t+\Delta t)}$  les équations (3.) constituent un système d'équations non linéaires.

### 3.2.4 Contact avec frottement

La formulation du contact est basée sur une méthode de pénalisation (Cf. 2.5). Les conditions de contact peuvent être glissantes ou frottantes. Les noeuds qui vont entrer en contact sont supposés inconnus. La valeur du coefficient de pénalisation  $\frac{1}{\varepsilon}$  est relative à une mesure de la rigidité locale au noeud :

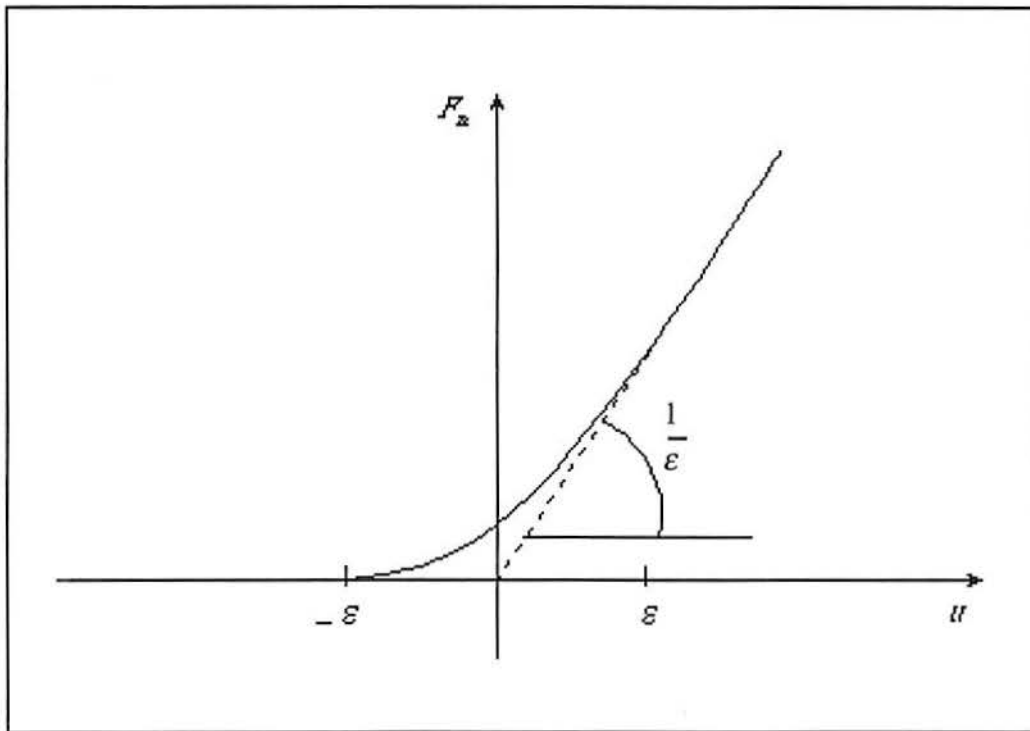


Figure 3.8 : Définition du coefficient de pénalisation

### 3.2.4 Résolution de systèmes non linéaires

#### Introduction

Pour résoudre des systèmes linéaires, différents algorithmes existent sous SYSTUS+. Dans tous les cas la solution est obtenue à partir d'un schéma itératif et incrémental.

La satisfaction des équations d'équilibre demande de trouver une solution de l'équation :

$$\Psi = F - \phi$$

où  $\Psi$  est le vecteur des forces nodales résiduelles ;

$F$  est le vecteur des forces extérieures appliquées à la structure ;

$\phi$  est le vecteur des forces internes induites par la déformation de la structure.

Pour résoudre ce problème, une procédure incrémentale et itérative est utilisée :

- incréments dans le temps (il s'agit d'un temps fictif ou d'un facteur de charge permettant de décrire le chargement) ;

- à un instant donné, itérations pour minimiser les forces résiduelles.

Les incréments dans le temps permettent de faire progresser les charges appliquées à la structure.

Nous ferons l'hypothèse que les forces extérieures ne dépendent pas des déplacements.

Pour résoudre un problème non linéaire on doit :

- choisir une méthode de résolution d'équations non linéaires
- choisir un seuil de tolérance à vérifier sur les équations d'équilibre
- choisir une longueur d'incrément.

Les méthodes de résolution de systèmes non linéaires implantées sous SYSTUS+ sont :

- méthode de Newton-Raphson
- méthode de Newton modifiée
- méthode quasi-Newton
- méthode à arc constant.

La méthode de Newton-Raphson est la seule qui nous permette ici de traiter la non linéarité due au contact surfacique.

### méthode de Newton-Raphson

Considérons une approximation à l'itération  $i$  de la solution à  $t + \Delta t$  :  $U_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  à laquelle correspond le vecteur de déséquilibre  $\Psi_{(t+\Delta t)}^{(i)}$ . Pour améliorer la solution à  $i + 1$  nous écrivons :  $\Psi_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 0$

et en appliquant à  $\Psi$  un développement en série de Taylor limité à l'ordre 1 nous avons :

$$\Psi^{(i+1)} = \Psi^{(i)} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{(i)} (U^{(i+1)} - U^{(i)}) = 0 \quad (3.31)$$

soit  $-\left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{(i)} (U^{(i+1)} - U^{(i)}) = \Psi^{(i)}$  avec :  $\left( \frac{\partial \Psi}{\partial U} \right)^{(i)} = K_T$

où  $K_T$  est la matrice « tangente » de raideur, puis on réactualise les déplacements par :

$$U^{(i+1)} = U^{(i)} + \Delta U^{(i)}$$

L'algorithme général de calcul est le suivant :

- a) Détermination d'un état initial :  $U^{(0)} = U^{(0)}(t + \Delta t) = U^{(0)}(t)$
- b) Calcul de l'incrément de déplacement :  $K_T \Delta U^{(i)} = -\Psi^{(i)}$
- c) Détermination du dernier état :  $U^{(i+1)} = U^{(i)} + \Delta U^{(i)}$
- d) Retour à l'étape b) si les forces résiduelles  $\Psi^{(i+1)}$  sont encore supérieures au seuil de précision souhaité.

L'algorithme général de résolution est décrit sur la figure suivante :

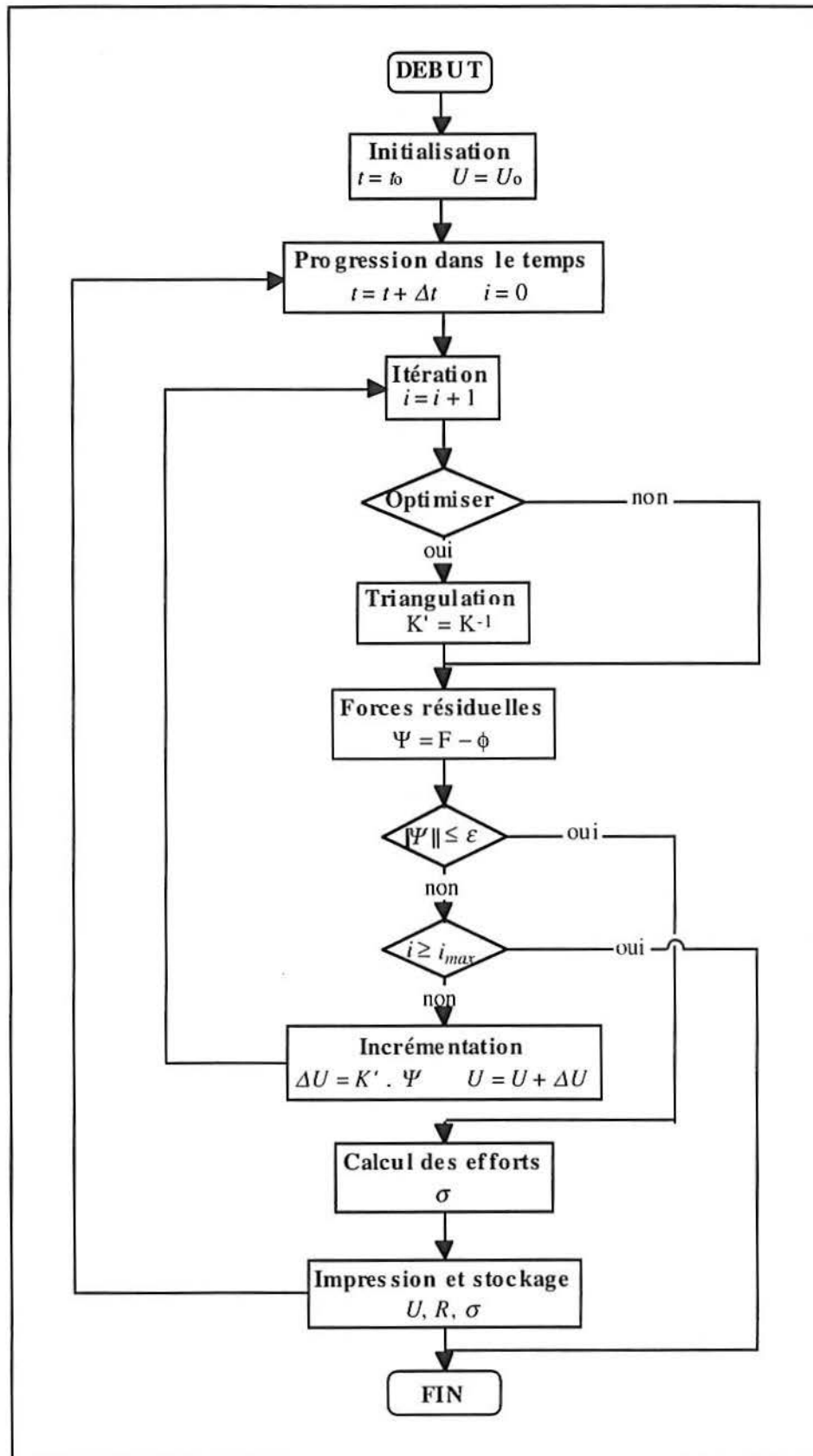


Figure 3.9 : Algorithme de résolution de problèmes statiques non linéaires



La triangulation de la matrice  $K_T$  a lieu au début de chaque incrément.

Le processus itératif est poursuivi jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit vérifié, c'est-à-dire lorsque le résidu est inférieur à la précision demandée.

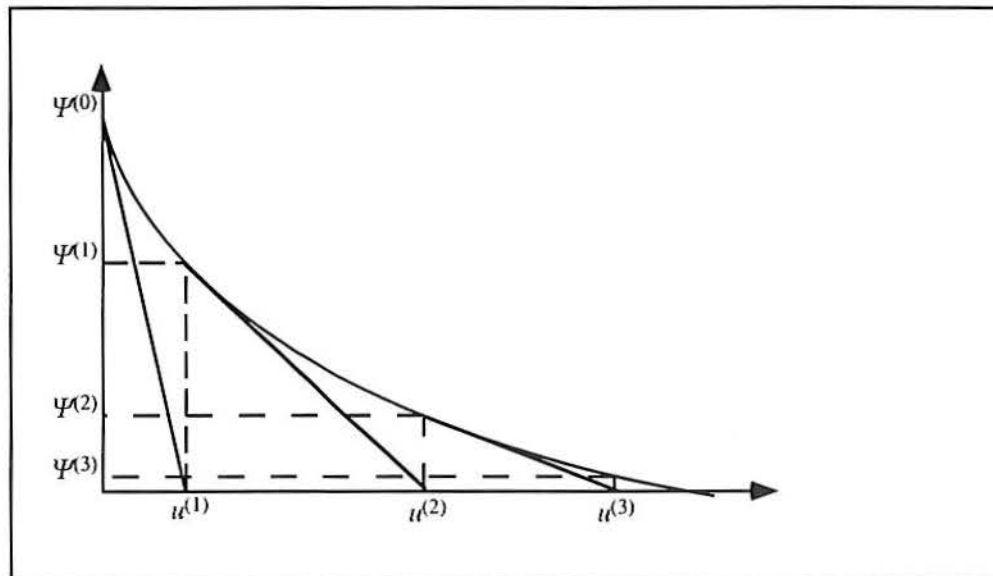


Figure 3.10 : Méthode de Newton-Raphson

### 3.3 Modélisation du cambrage

#### 3.3.1 Etude MEF en grandes déformations :

On le rappelle, l'étape de cambrage (Fig. 3.1), servant à donner une forme intermédiaire au coussinet pendant sa phase d'élaboration, consiste à soumettre à température ambiante le coussinet bi-appuyé sur un berceau demi-cylindrique à l'action d'un poinçon de forme complémentaire. Les caractéristiques géométriques du poinçon et de la coquille servant au cambrage, ainsi que celles de la pièce initiale sont répertoriées dans le tableau 3.1 :

$\phi$ poinçon de cambrage	47,94 mm
$\phi$ coquille de cambrage	52,25 mm
Longueur développée du coussinet	81,90 mm
épaisseur acier	1,64 mm
épaisseur Al-Sn	0,43 mm

Tableau 3.1 : données géométriques pour le cambrage

Sur les figures suivantes sont représentées quelques déformées caractéristiques du cambrage du coussinet et les isovalues des contraintes équivalentes de Von Mises correspondantes. A titre d'information, il est utile de signaler que ce type de calcul incrémental a nécessité de *trente à quarante mille pas de calcul*. On s'est particulièrement attaché à suivre l'évolution du contact entre le coussinet et le poinçon ainsi que le contact entre le dos du coussinet et le berceau.

Durant la majeure partie du cambrage, le coussinet n'épouse pas complètement la forme du poinçon, et se contente simplement d'acquérir une géométrie rapprochée de celle du poinçon. On verra sur les figures suivantes que l'opération de cambrage, très proche finalement d'un cintrage d'une bande métallique, se résume principalement à une flexion à quatre appuis, ceux-ci pouvant évoluer le long du coussinet au cours du formage. Ces appuis sont symbolisés sur les figures par les points situés sur les rebords supérieurs et inférieurs du coussinet. Pour des raisons de symétrie, les calculs ne sont réalisés que sur une demi-pièce, et seule la moitié des points d'appuis apparaissent alors.

Le coussinet étant en flexion quatre points, présentant par conséquent une déformée de type cubique, il apparaît que le frottement est de faible importance pour les points de contact entre le coussinet et le poinçon, du fait que l'on peut supposer que l'énergie dissipée par frottement est faible compte tenu de la taille des surfaces concernées et de la plasticité du matériau. C'est pourquoi pour alléger ces calculs, déjà fortement « alourdis » par les nombreuses non-linéarités présentes, on imposera uniquement un contact glissant sans frottement.

L'évolution de la géométrie du coussinet, ainsi que celle des contraintes, dépend bien évidemment des lieux d'application des points d'appui. Nous allons donc discrétiser l'étape de cambrage selon la progression des points de contact. De façon générale, le coussinet a tendance à « s'enrouler » autour du poinçon. Ainsi, les noeuds ne glissent pas sur le poinçon mais l'évolution du contact a lieu par décollement d'un noeud juste

après la prise de contact du noeud situé juste à coté. Les noeuds jouent alors un rôle de « rotule ».

Le contact entre le coussinet et le berceau est quant à lui plus complexe, et l'on peut distinguer plusieurs étapes :

- Du début du cambrage jusqu'au temps approximatif de  $0,5^*$ , soit à 50% de la descente totale du poinçon, le même noeud du coussinet glisse sur le rebord supérieur arrondi du berceau (Fig. 3.11). La distance entre le point d'appui du berceau sur le coussinet et l'extrémité du coussinet, que l'on appellera dans la suite  $L$ , reste constante ;

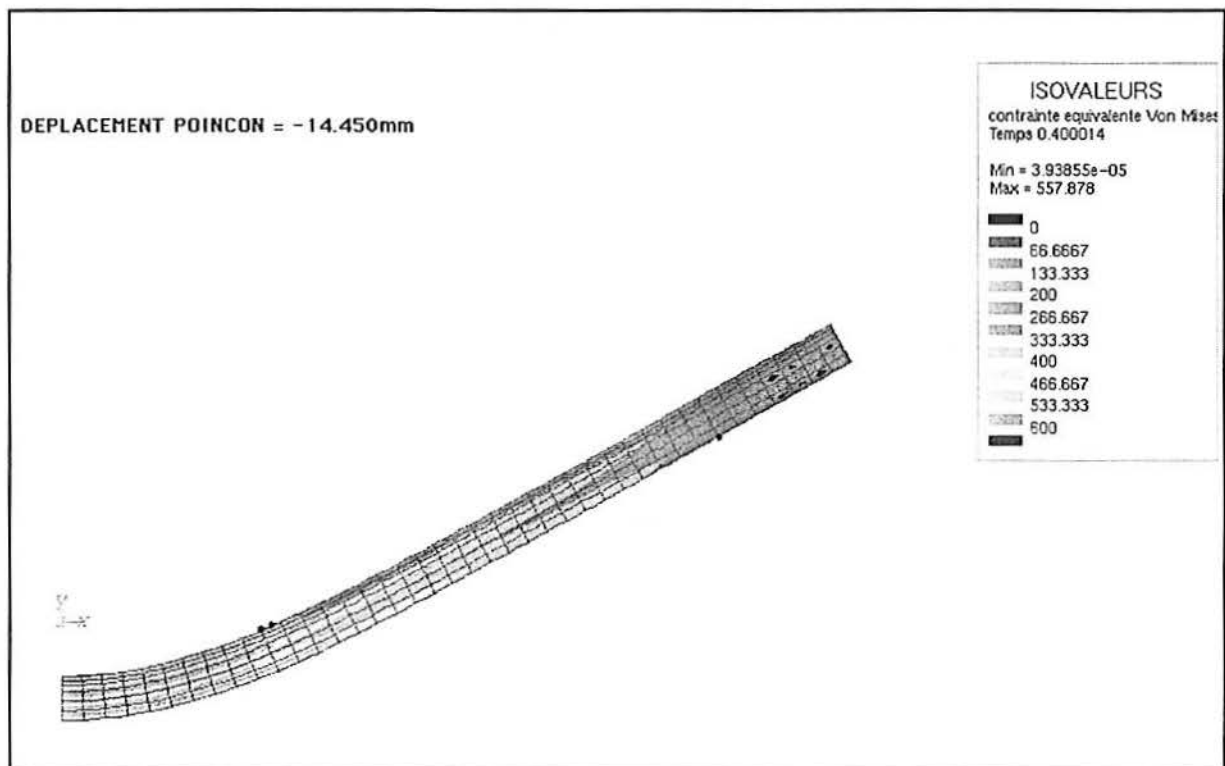


Figure 3.11 : Contraintes de Von Mises et points d'appui à 40% de la descente totale du poinçon

- Entre les périodes 0,5 et 0,55, le coussinet glisse toujours sur le rebord du berceau mais on a cette fois-ci déplacement des points de contact par glissement, aussi bien sur le coussinet que sur le berceau (Fig. 3.12). Cela se traduit par une légère diminution de la distance  $L$  ;

\* Le temps est ici un paramètre permettant seulement de faire progresser les charges appliquées à la structure de manière statique. Les notions de vitesse et d'accélération n'interviennent pas.

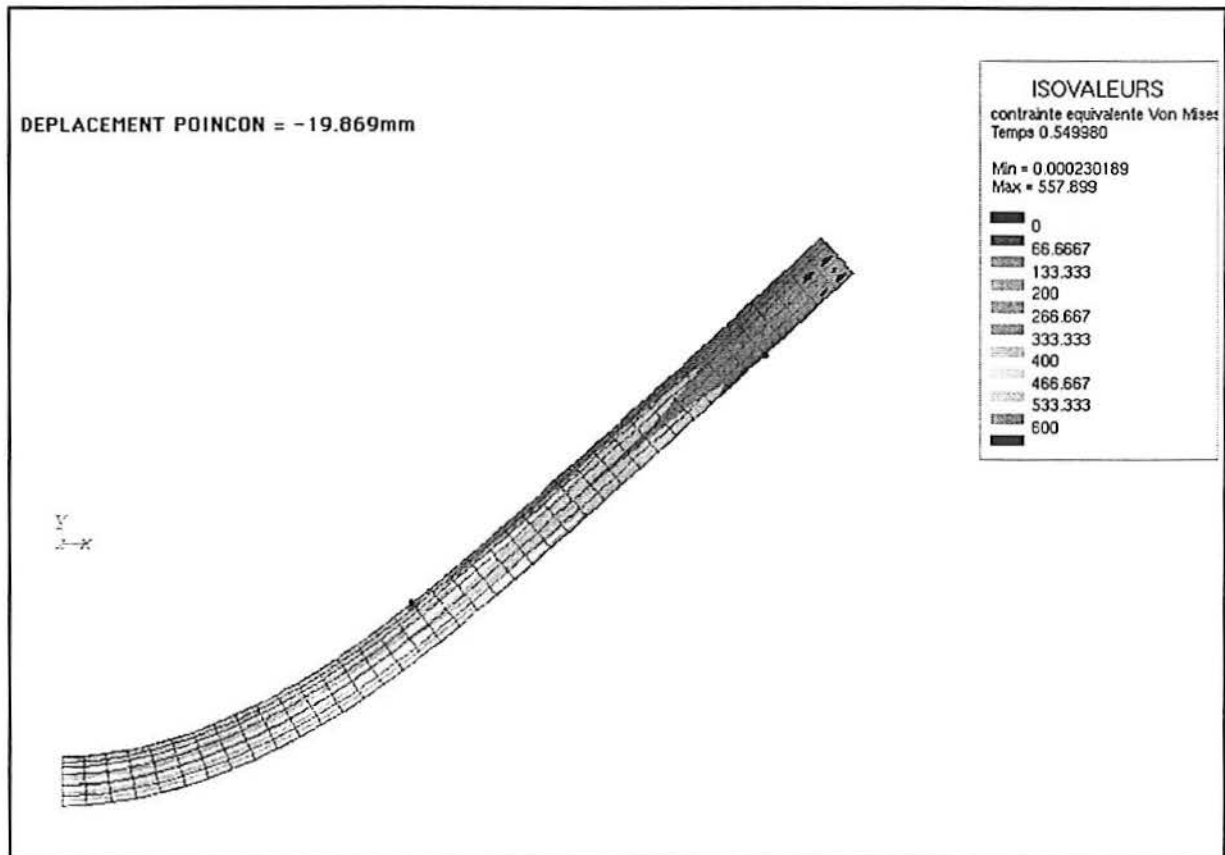


Figure 3.12 : Contraintes de Von Mises et points d'appui  
à 55% de la descente totale du poinçon

- Entre les périodes 0,55 et 0,6, le contact est du même type que celui observé entre le coussinet et le poinçon. Les changements des noeuds du coussinet en contact se font par décollement de l'un simultanément à la prise de contact du noeud voisin. Le coussinet « roule » alors autour du berceau (Fig. 3.13). La distance  $L$  reprend sa valeur initiale ;

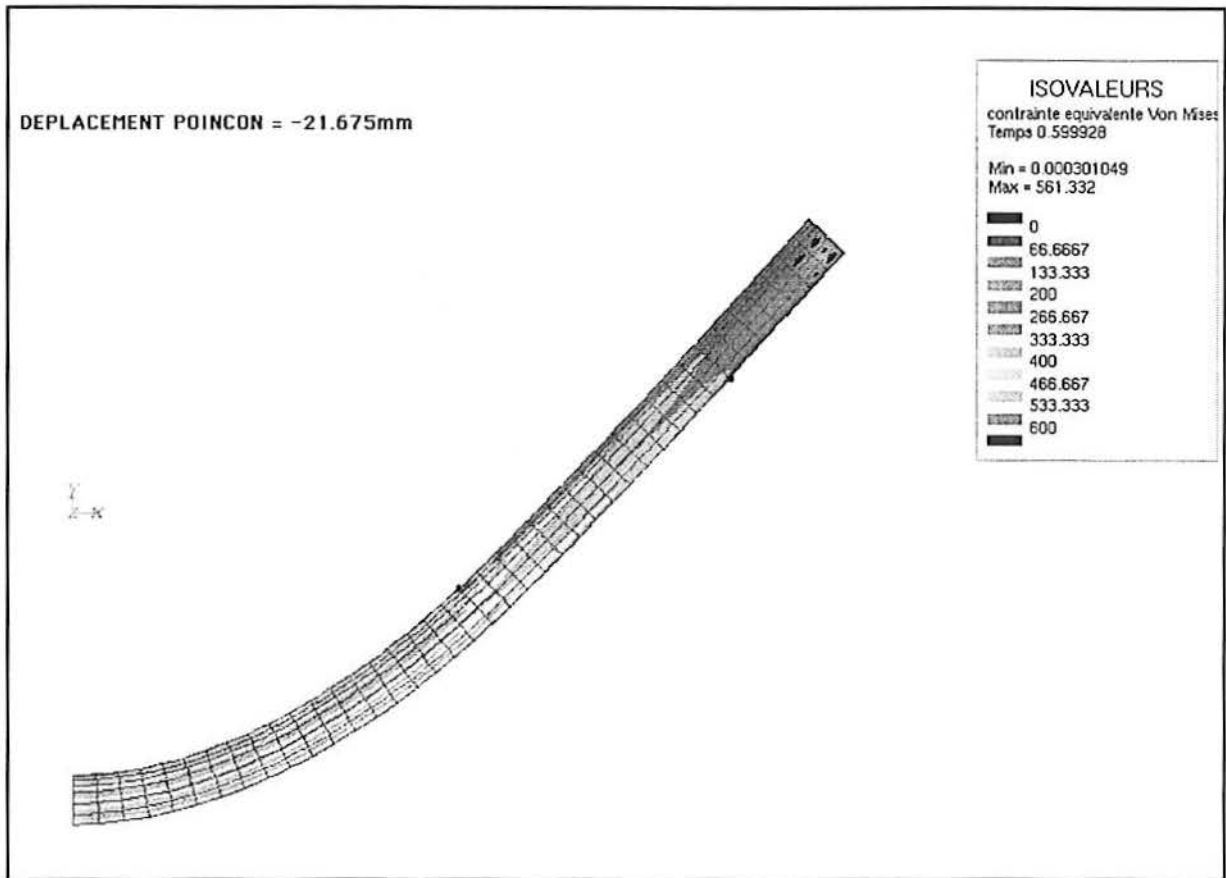


Figure 3.13 : Contraintes de Von Mises et points d'appui à 60% de la descente totale du poinçon

- Après le temps 0,6, et jusqu'au temps de 0,8, on retrouve la même évolution du contact que dans la seconde période. Le point de contact sur le berceau suit alors par glissement les noeuds du coussinet (Fig. 3.14), jusqu'à obtention pour  $L$  de sa valeur minimale  $L = 0$ .

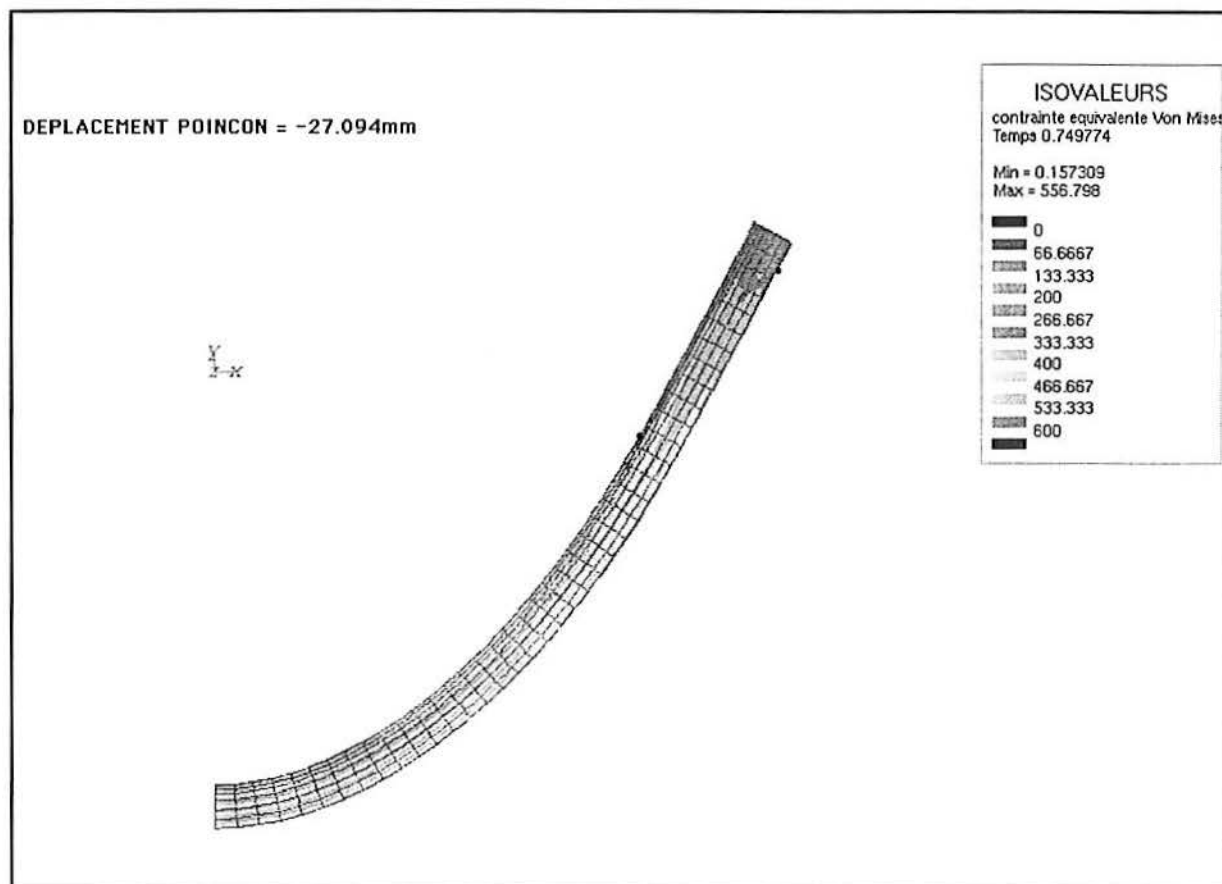


Figure 3.14 : Contraintes de Von Mises et points d'appui à 75% de la descente totale du poinçon

L'évolution de ces points d'appui influe directement sur la flèche observée au milieu du coussinet. On peut ainsi retracer les différentes étapes sur la courbe traduisant l'évolution au cours du cambrage de la différence entre coussinet et poinçon des déplacements verticaux respectifs (Fig. 3.15). Nous rappelons que le temps est ici une variable proportionnelle au déplacement du poinçon. Il atteint la valeur de 1 lorsque la descente du poinçon est maximale. Ce dernier est en phase de remontée lorsque le temps est supérieur à 1.

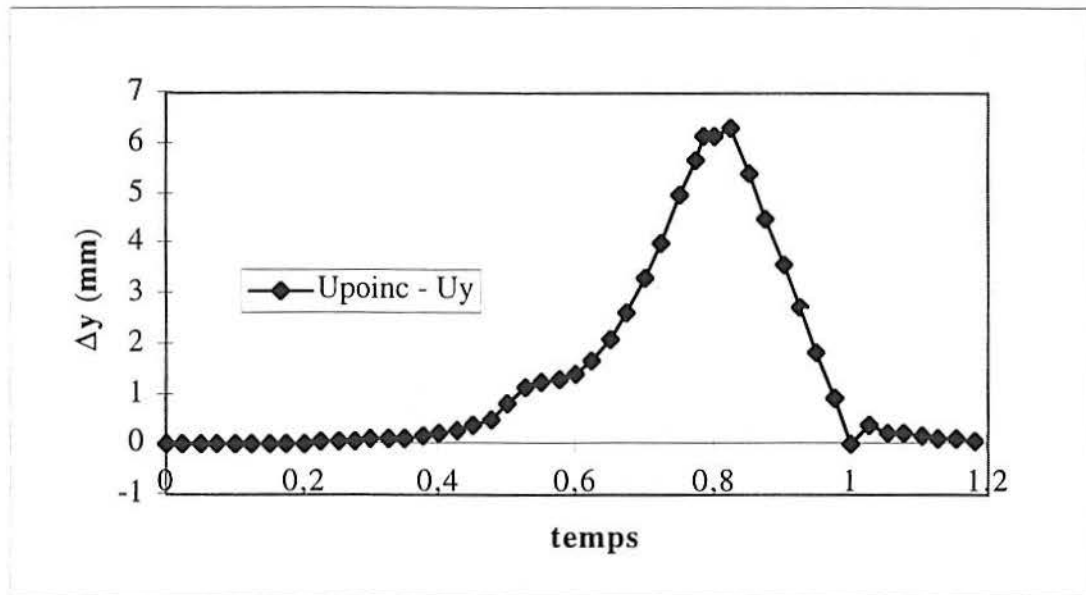


Figure 3.15 : Evolution de l'écartement coussinet/poinçon au centre du coussinet

Le coussinet étant en flexion quatre points jusqu'à  $t = 0,8$ , il est normal d'observer un champ de contraintes constant entre les points d'appui du poinçon sur le coussinet. La zone soumise à ce champ de contraintes évolue en fonction du déplacement des points de contact. Toutefois cette évolution n'entraîne pas de modifications des valeurs du champ de contrainte. En effet, le coussinet étant plastifié dès le début du cambrage, le champ de contraintes est alors borné par le seuil d'écoulement plastique de chacune des deux couches du coussinet.

- A partir de  $t = 0,8$ , le coussinet vient toucher le fond du berceau et du même coup l'écartement entre poinçon et coussinet diminue. Le coussinet n'est plus alors en flexion quatre points mais chaque moitié du coussinet se comporte comme une poutre encastrée-appuyée du fait de la symétrie interdisant toute rotation (Fig. 3.16). Le champ de contraintes n'est plus constant le long des fibres mais il est maximal aux points de contact avec le poinçon ;

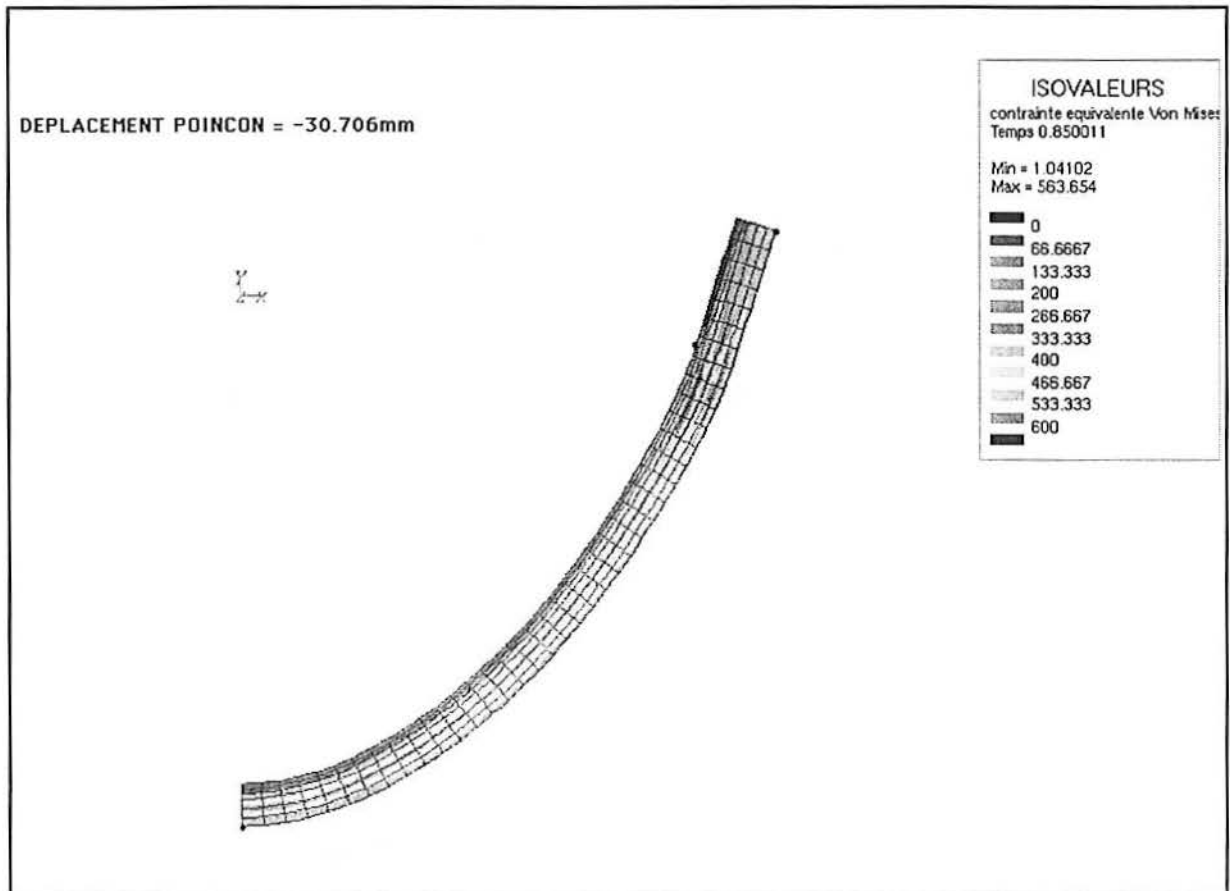


Figure 3.16 : Contraintes de Von Mises et points d'appui  
à 85% de la descente totale du poinçon

- Après  $t = 0,9$ , et jusqu'à l'enfoncement total du poinçon ( $t = 1$ ), le problème RDM correspondant est du type suivant (Fig. 3.17) :

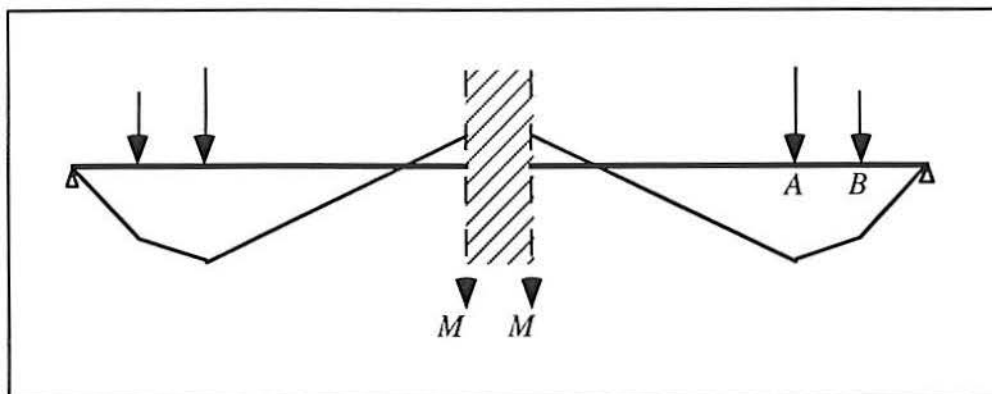


Figure 3.17 : Diagramme des moments correspondant à un double appui  
sur une poutre encastée appuyée



On a alors concentration des contraintes entre les points *A* et *B*, ainsi qu'une diminution du rayon de courbure dans cette même zone, d'où la rupture de pente effectivement observée figure 3.18 en cet endroit sur le coussinet ;

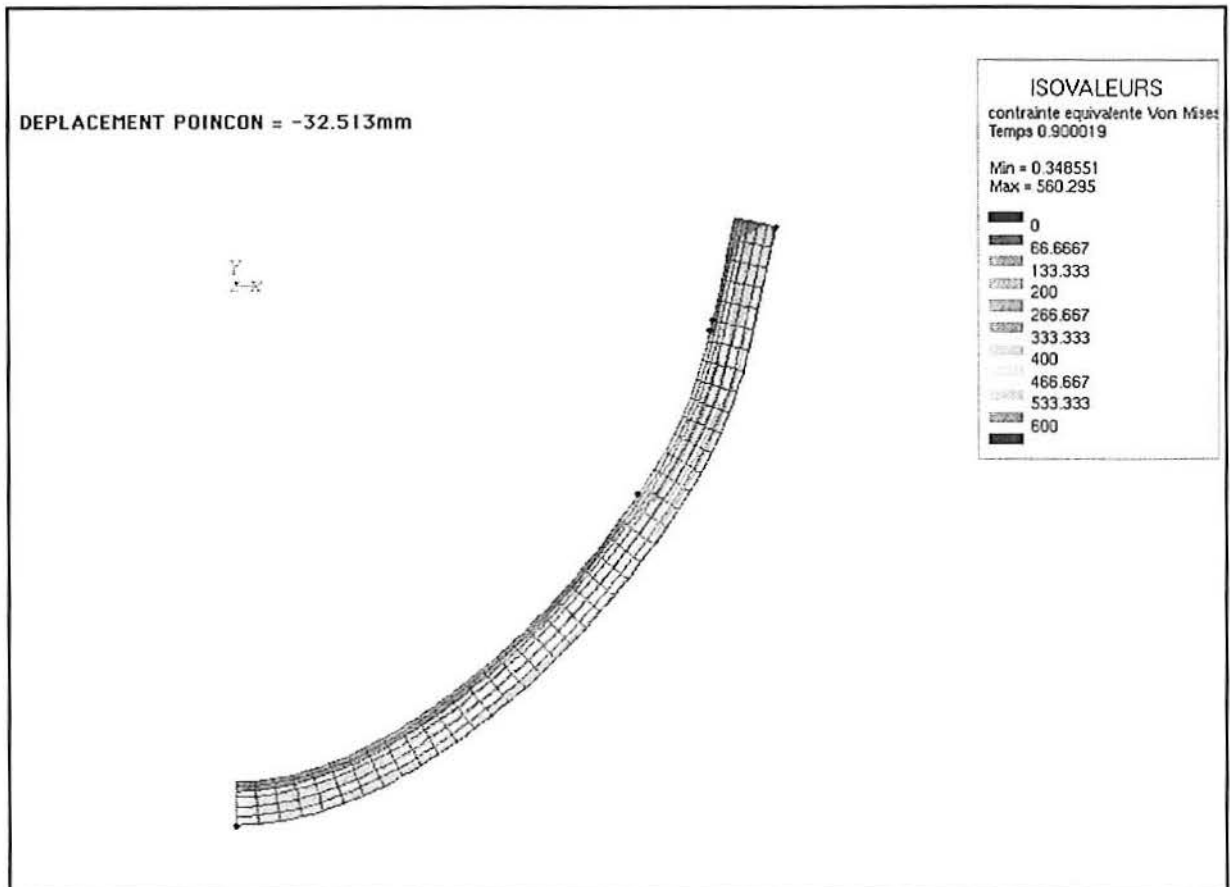


Figure 3.18 : Contraintes de Von Mises et points d'appui à 90% de la descente totale du poinçon

- Après  $t = 1$ , le poinçon est progressivement remonté et le coussinet relâché. L'évolution des points de contact est inversée par rapport à ce qu'elle était au cours du chargement, mais avec des temps beaucoup plus courts (Fig. 3.19).

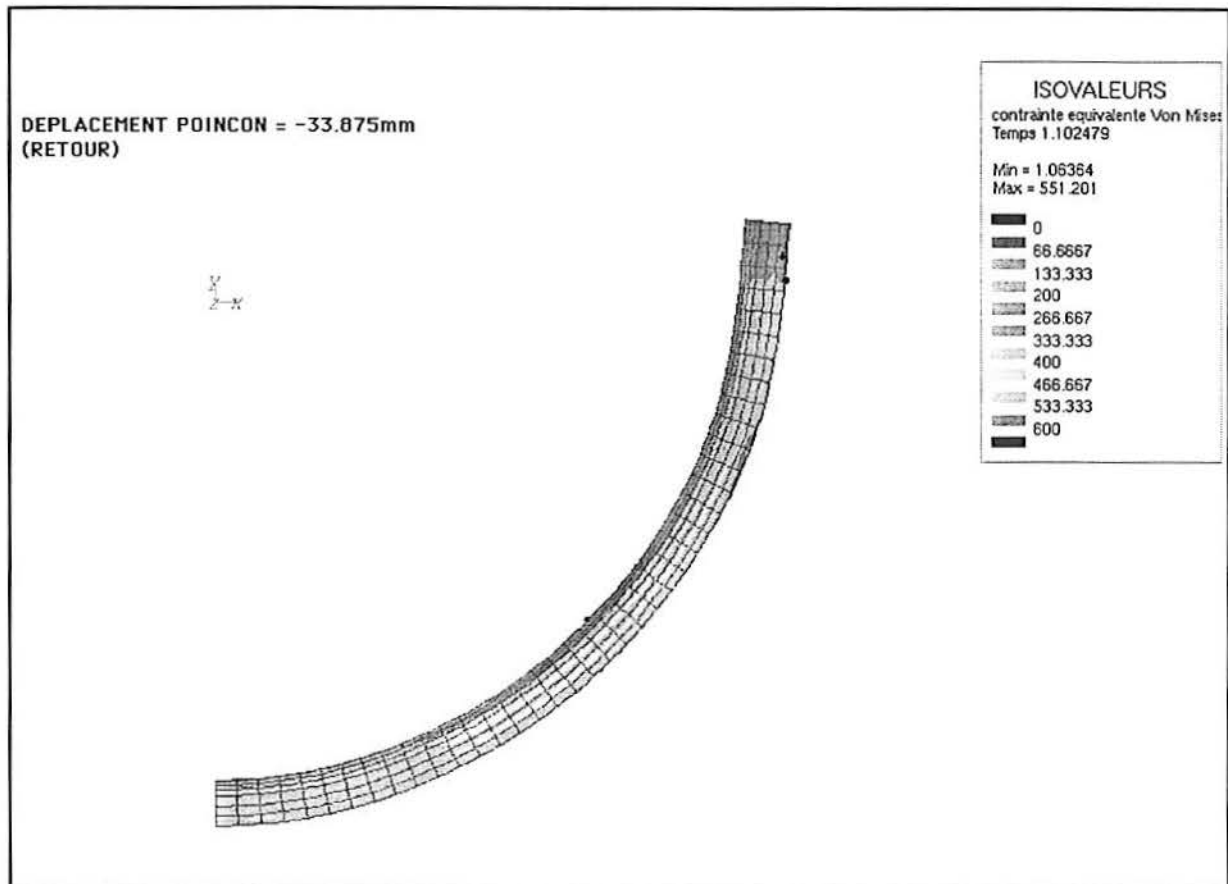


Figure 3.19 : Contraintes de Von Mises et points d'appui au cours de la remontée du poinçon

Après la remontée complète du coussinet, l'état des contraintes au sein du reste faible par rapport aux contraintes maximales observées au cours du chargement, et se trouve sensiblement réparti de manière égale le long du coussinet.

### 3.3.2 Comparaison MEF - approche « RDM » :

L'objectif est de vérifier si une approche simplifiée type RDM est licite grâce aux résultats MEF et « *vice-versa* ».

Les hypothèses retenues sont alors celles de la RDM classique (hypothèse de Navier-Bernoulli sur les sections droites), mais prises en déformations planes.

1<sup>ère</sup> étape : la flexion est purement élastique dans chacune des deux couches.

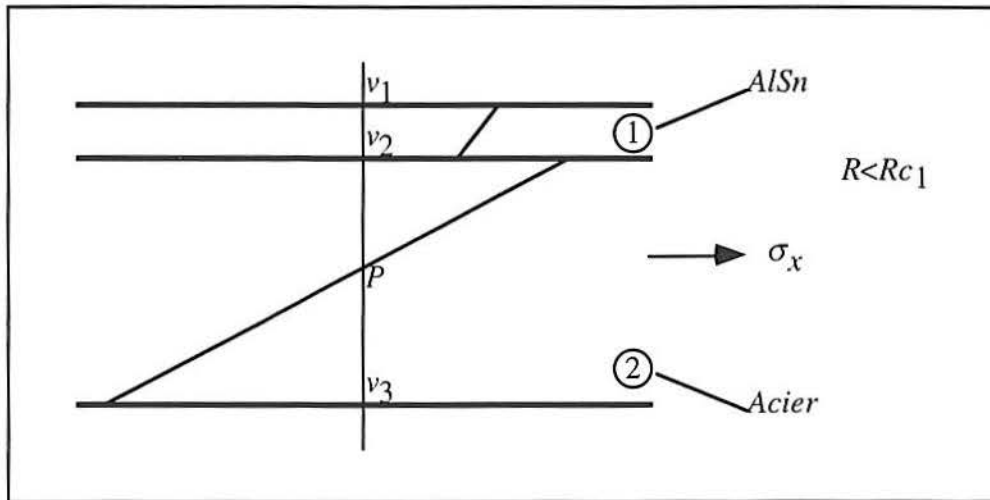


Figure 3.20 : Répartition des contraintes  $\sigma_x$  au centre du coussinet obtenue en RDM pour  $R < Rc_1$

$P$  étant le centre élastique du coussinet.

$$\varepsilon_x = \frac{y}{R} \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \quad (3.33)$$

or  $\sigma_z = \nu\sigma_x$  car  $\varepsilon_z = 0$  (déformations planes)

soit 
$$\varepsilon_x = \frac{y}{R} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu^2\sigma_x) \quad (3.34)$$

$$\frac{y}{R} = \frac{1}{E}\sigma_x(1 - \nu^2) \quad (3.35)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{y}{R} \left( = E' \frac{y}{R} \right) \quad (3.36)$$

$E$  étant le module d'élasticité longitudinal du matériau considéré.

On est élastique dans chacune des couches jusqu'à atteindre le rayon critique  $Rc$  dans l'une des deux couches qui prend les valeurs :

en  $y = v_1$

$$Rc_1 = \left( \frac{\sigma_0^{(1)}(1 - \nu_1^2)}{E_1 \nu_1} \right)^{-1} = 1,54 \cdot 10^3 \text{ mm} \quad (3.37)$$

en  $y = v_2$

$$Rc_2 = \left( \frac{\sigma_0^{(2)}(1 - \nu_2^2)}{E_2 \nu_2} \right)^{-1} = 0,41 \cdot 10^3 \text{ mm} \quad (3.38)$$

en  $y = v_3$

$$Rc_3 = \left( \frac{\sigma_0^{(2)}(1 - \nu_2^2)}{E_2 \nu_3} \right)^{-1} = 0,49 \cdot 10^3 \text{ mm} \quad (3.39)$$

$$Rc_1 > Rc_3 > Rc_2$$

La limite élastique est atteinte en premier en  $v_1$  dans le matériau Al-Sn, puis en  $v_3$  dans l'acier, et enfin en  $v_2$  toujours dans l'acier.

*Remarque :* du fait des grandes valeurs des rayons critiques, on notera que les limites élastiques sont atteintes dès le début du cambrage.

2<sup>ème</sup> étape : la déformation plastique apparaît en  $v_1$

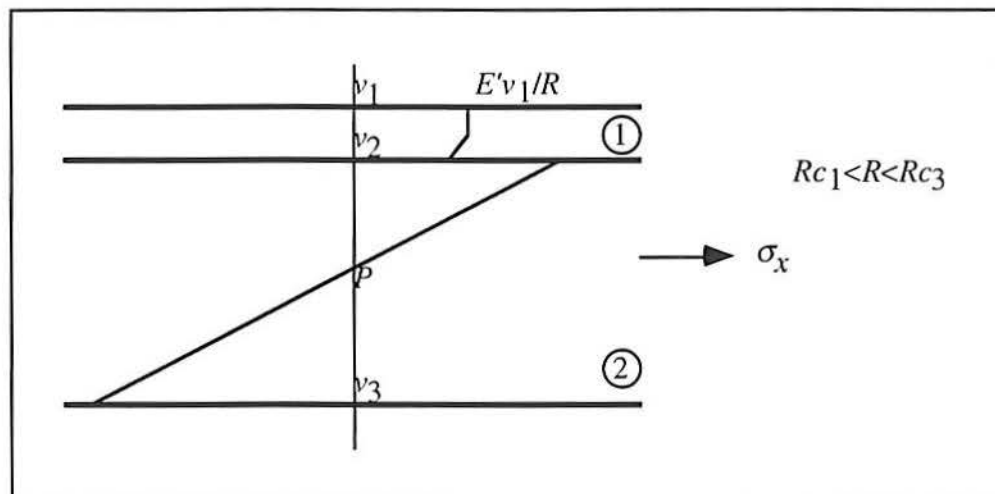


Figure 3.21 : Répartition des contraintes  $\sigma_x$  au centre du coussinet obtenue en RDM pour  $Rc_1 > Rc_3 > Rc_2$

Loi de normalité (ou loi d'écoulement plastique) :

Soit  $v$  le champ des vitesses de déformations plastiques tel que  $v = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$

$\lambda$  étant le multiplicateur plastique et  $f$  (pour le critère de Von Mises) s'écrit :

$$f(\sigma) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6k^2 \quad (3.40)$$

$$f(\sigma) = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 = 6k^2 = 6\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad (3.41)$$

$$v_z = 0 \Rightarrow d\varepsilon_z^p = 0 \quad (3.42)$$

$$d\varepsilon_z = d\varepsilon_z^{elast} + d\varepsilon_z^p \quad (3.43)$$

$$d\varepsilon_z = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = 0 \Rightarrow \sigma_z = \frac{1}{2}\sigma_x \quad (3.44)$$

$$\text{soit } f(\sigma) = 2\left(\sigma_x^2 + \frac{\sigma_x^2}{4} - \frac{\sigma_x^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\sigma_x^2 \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_{01}}{\sqrt{0,75}} \quad (3.46)$$

où  $\sigma_{01}$  est la limite d'élasticité initiale de Al-Sn

*Remarque* : dans la partie élastique, on avait  $\sigma_z = \nu\sigma_x$ , toutefois on peut supposer que  $\sigma_z$  est continu alors que  $\sigma_x$  est discontinu dans l'épaisseur du matériau.

3<sup>ème</sup> étape : la déformation plastique est apparue en  $v_3$  puis en  $v_2$  et progresse

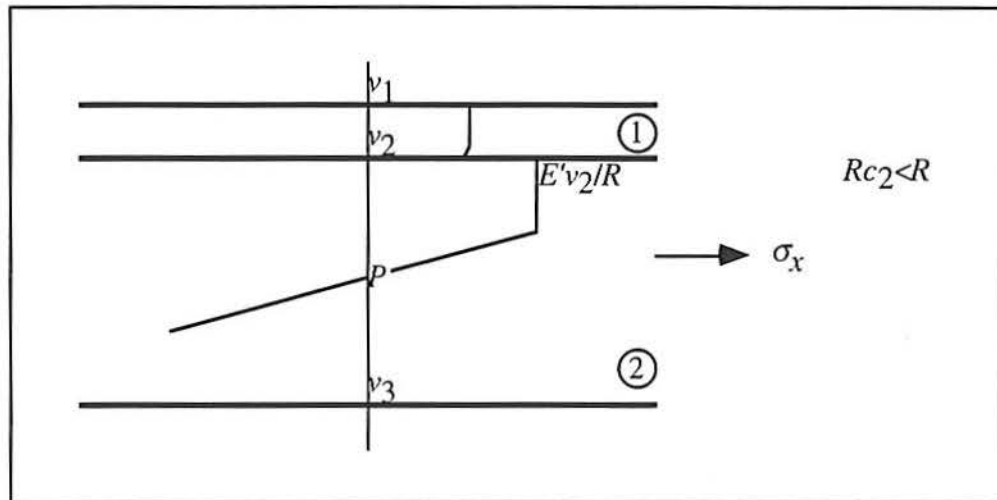


Figure 3.22 : Répartition des contraintes  $\sigma_x$  au centre du coussinet  
obtenue en RDM pour  $R > Rc_2$

On peut faire la même remarque que pour l'étape précédente, à savoir que l'on suppose  $\sigma_z$  discontinu alors que  $\sigma_x$  est continu.

On peut réaliser une comparaison avec la distribution en section centrale issue des calculs MEF présentée sur la figure suivante :

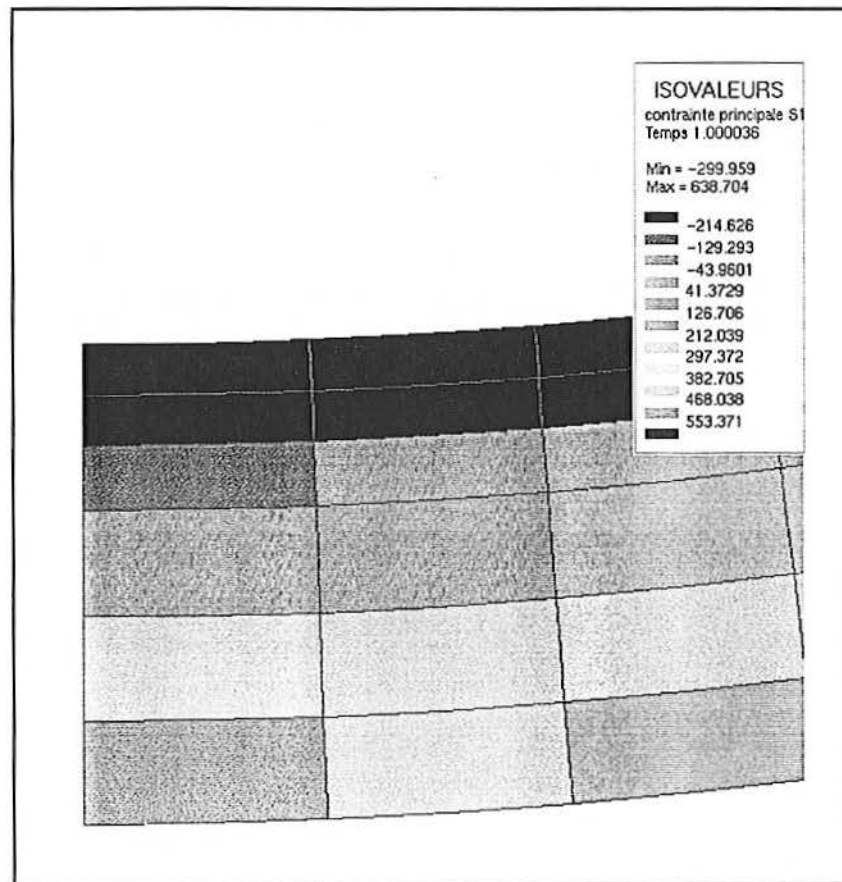


Figure 3.23 : Répartition des contraintes  $\sigma_x$  au centre du coussinet obtenue en MEF

Sur cette coupe du coussinet prise dans sa section centrale en fin de cambrage, on retrouve bien une distribution similaire des contraintes, au signe près. Dans l'approche RDM, les contraintes étaient définies négatives en traction et en positives compression, alors que leur signe est inversé dans l'approche MEF.

### 3.4 Modélisation de la conformation

L'étape de conformation (Fig. 3.2), permet de donner au coussinet sa forme finale. A l'issue de la phase de cambrage, le coussinet n'est pas complètement relâché mais est directement poussé dans une coquille de diamètre très légèrement supérieure qu'est la coquille de conformation. Le poinçon, pendant sa descente, viendra tasser et pincer le coussinet à chacune de ses extrémités de façon symétrique, toujours à température ambiante. Les caractéristiques géométriques du poinçon et de la coquille servant à la conformation sont cette fois-ci données dans le tableau 3.2 :

poinçon de conformation - $A^*$	52,688 mm
poinçon de conformation - $B^*$	1,944 mm
$\phi$ coquille de conformation	52,75 mm
épaisseur acier	1,64 mm
épaisseur Al-Sn	0,43 mm

Tableau 3.2 : données géométriques pour la conformation

Pour cette simulation, le coussinet est relâché jusqu'à obtention d'une ouverture égale au diamètre du nouveau berceau, avant de relancer le calcul pour la phase de conformation.

Une des difficultés consistait à récupérer les quantités physiques du maillage source issu du cambrage vers le maillage cible pour la conformation. Afin de respecter au mieux l'histoire des sollicitations du coussinet pendant l'étape de cambrage, une projection des quantités physiques du maillage initial issu du cambrage vers le maillage utilisé pour la conformation s'avère nécessaire. Systus+ permet ce type de transfert. La technique consiste à moyenner ces grandeurs aux noeuds de l'ancien maillage et à utiliser les fonctions de forme pour en déduire les valeurs aux points d'intégration des éléments du nouveau maillage.

Sur les figures suivantes sont représentées quelques déformées de la conformation du coussinet et les isovaleurs des contraintes équivalentes de Von Mises correspondantes.

On peut, pour cette phase de conformation, assimiler le coussinet à un arc reposant sur deux appuis encastrés aux naissances, soumis à un système de forces réparties sur toute ou partie de la surface de contact entre coussinet et coquille de conformation. On imagine alors aisément l'importance que prend le frottement pour traiter ce type de problème. C'est pourquoi on choisira un frottement répondant au critère de Coulomb, avec un coefficient égal à 0,2, valeur déterminée expérimentalement au chapitre précédent. Les forces de contact appliquées sont de nouveau repérées à l'aide des points situés sur les rebords du coussinet.

Cette phase de conformation peut être scindée en deux étapes principales tenant à la géométrie particulière du poinçon représentée figure 3.24. Le coussinet présente une épaisseur supérieure à l'espace compris entre la partie supérieure du poinçon et la coquille. C'est pourquoi pendant une partie de la descente du poinçon, le temps nécessaire au coussinet pour se « loger » le contact ne porte que sur quelques points tel qu'on peut le voir sur la figure 3.25.

\* Les longueurs  $A$  et  $B$  sont définies figure 3.24.



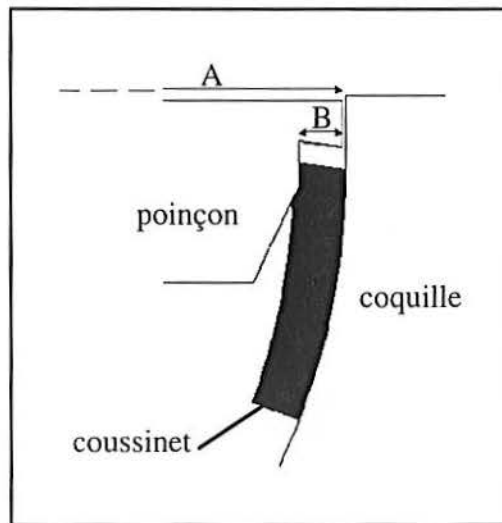


Figure 3.24 : Schéma du système poinçon/coussinet/ coquille

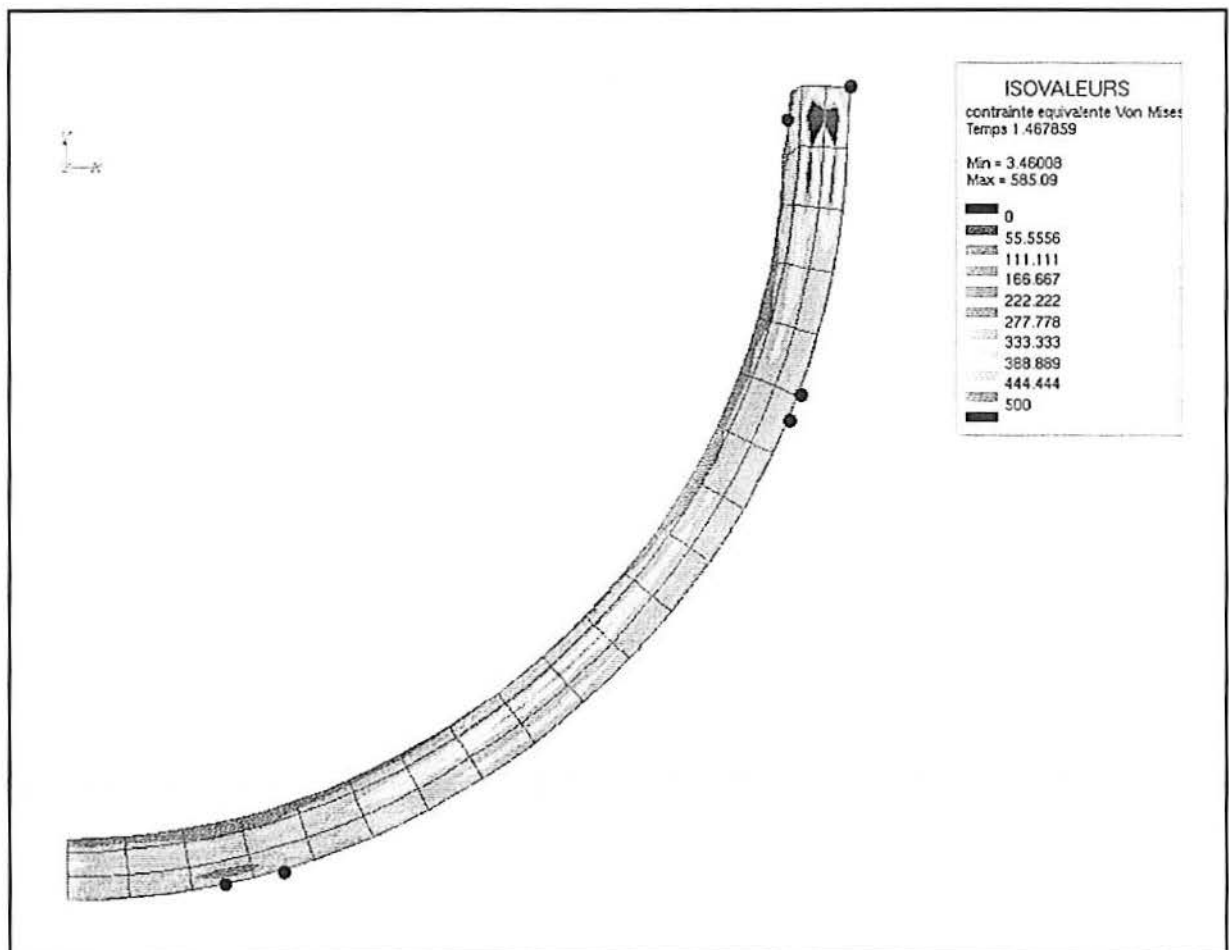


Figure 3.25 : Contraintes de Von Mises et points d'appui à 40% de la descente totale du poinçon

Une simplification du système peut être donnée en RDM et symbolisée sur la figure suivante :

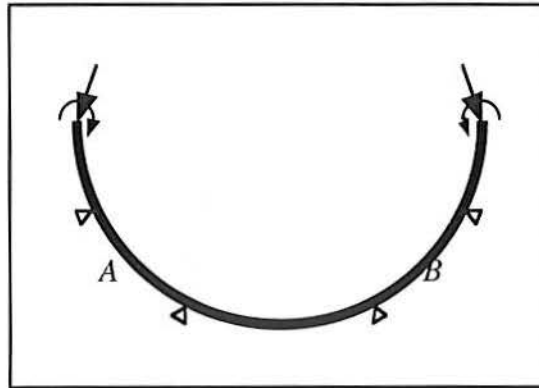


Figure 3.26 : Coussinet soumis à des forces de contact ponctuelles

Le coussinet s'apparente à un arc semi-encasté comprimé et fléchi. Le moment résultant est une combinaison des moments imposés par la flexion d'une part et issu de l'effort normal de compression d'autre part. Avec un tel modèle, du fait de la géométrie quasiment circulaire du coussinet, le moment maximal est obtenu entre les points de contact entre coussinet et berceau, dans la section à mi-portée repérée par les points *A* et *B*, confirmant les résultats obtenus par modélisation par éléments finis de la figure 3.25. Le moment le plus faible est situé aux alentours de ces mêmes points de contact. Du fait du moment de flexion, les contraintes normales sont relativement faibles le long de la fibre neutre du coussinet et plus élevées dès que l'on s'en éloigne. Elles sont toutefois minorées par l'effort normal de compression dans la partie du coussinet où le rayon est plus élevé que celui de la fibre neutre. Elles sont aussi plus faibles dans la partie Al-Sn car la limite d'élasticité de 48,5 MPa est très vite dépassée et les contraintes de Von Mises plafonnent à 80 MPa environ. Du fait du pincement de la tête du coussinet, il y a aussi des surcontraintes dans la zone sollicitée.

Lors d'une seconde phase, le coussinet est complètement encasté entre le poinçon et la coquille de conformation et le contact parfaitement établi sur toute la surface du coussinet (Fig. 3.27). A partir de ce moment, le coussinet est principalement en compression.

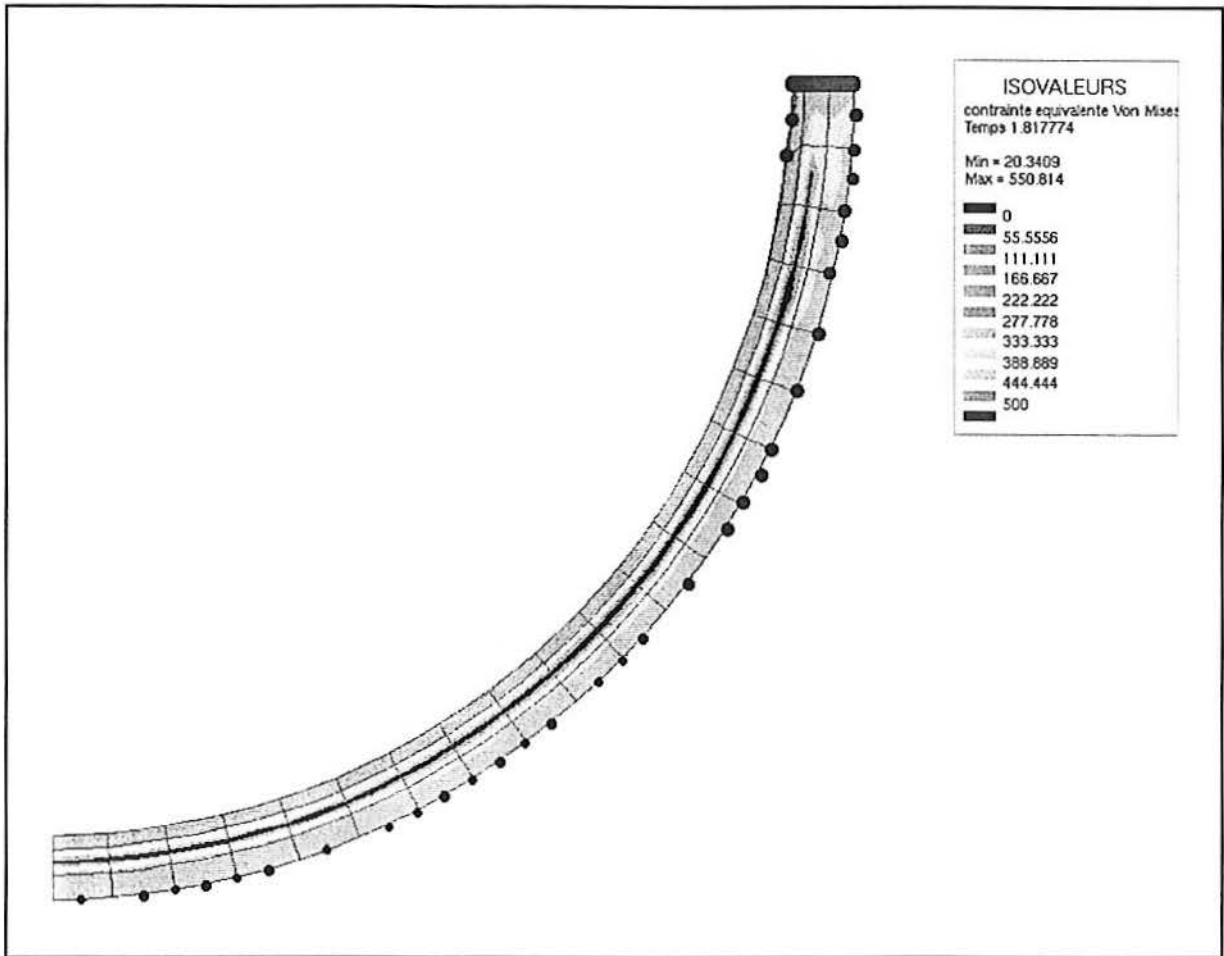


Figure 3.27 : Contraintes de Von Mises et points d'appui  
à 90% de la descente totale du poinçon

De nouveau le système peut être ainsi schématisé :

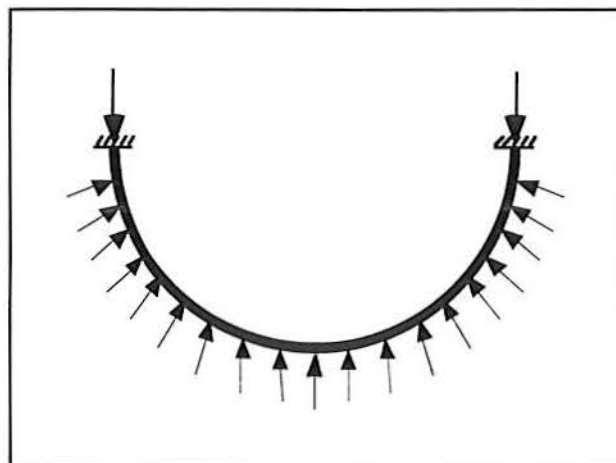


Figure 3.28 : Coussinet articulé et soumis à des forces réparties

	Résultats num. (mm)	Résultats exp. (mm)
Ouverture libre du coussinet après opération	53,78	54,00 ± 0,1
Hauteur du coussinet après opération	27,37	27,34

Tableau 3.3 : Confrontation des résultats numériques et expérimentaux après cambrage

### Après conformation

La valeur du diamètre de la coquille servant à la conformation est de 52,75 mm. Comme pour le cambrage, sont répertoriés dans le tableau 3.4 les résultats expérimentaux ainsi que ceux issus du calcul MEF, portant sur l'ouverture libre et la hauteur du coussinet :

	Résultats num. (mm)	Résultats exp. (mm)
Ouverture libre du coussinet après opération	52,20	52,30 ± 0,1
Hauteur du coussinet après opération	26,31	26,08

Tableau 3.4 : Confrontation des résultats numériques et expérimentaux après conformation

### 3.5.2 Contrôle du quadrillage du dos du coussinet

En plus de ces vérifications, les pièces ont été striées régulièrement au dos par gravage (Fig. 3.31) afin de mesurer l'évolution de longueur des « mailles » ainsi tracées. Les mesures de variations de quadrillages au dos du coussinet sont réalisées sur un coussinet peu différent de notre coussinet d'étude. La différence porte principalement sur les dimensions de celui-ci (la longueur développée LD est de 85 mm au lieu de 81,9 mm). Il faut alors pour une meilleure comparaison des résultats, s'intéresser aux variations de longueur des « macro-mailles » données en pourcentage (Fig. 3.32).

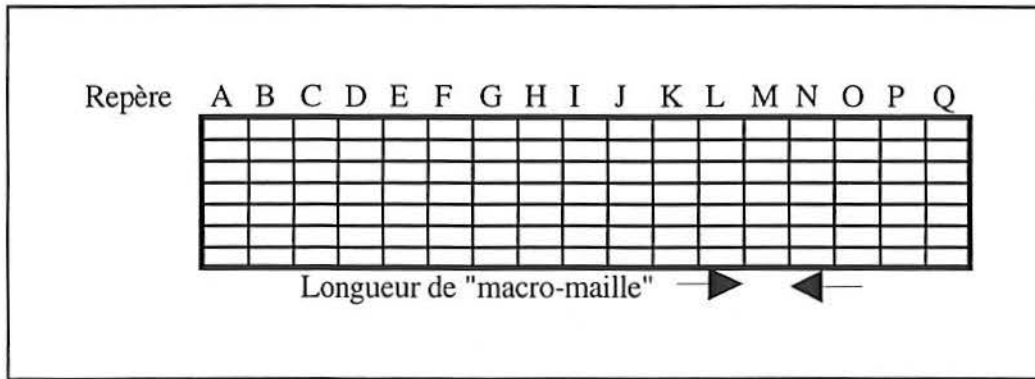
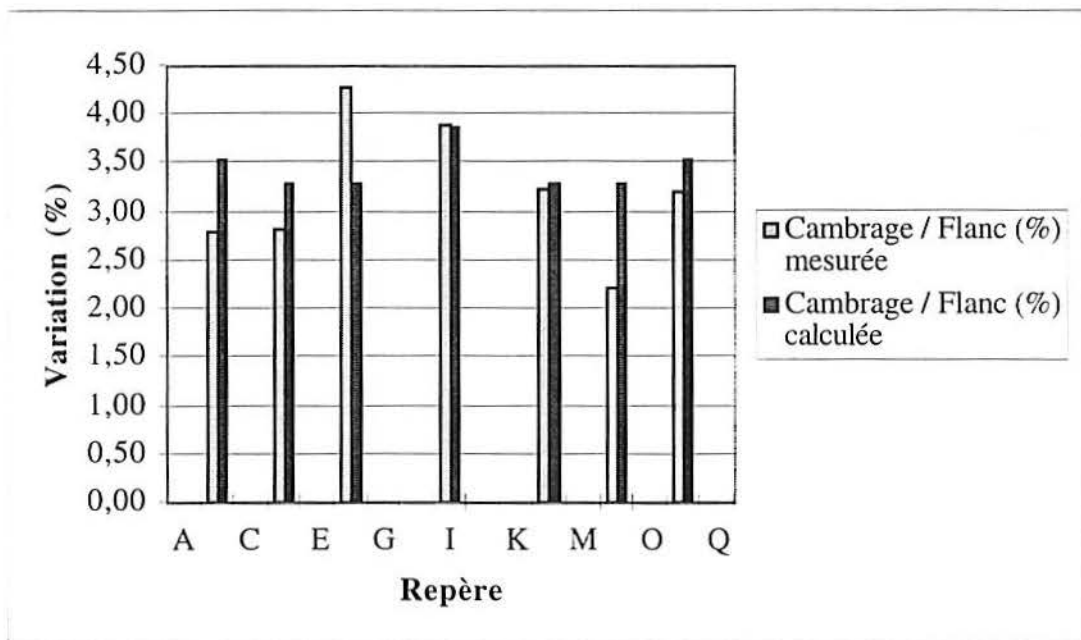


Figure 3.31 : Quadrillage du dos du coussinet en « macro-mailles »

On réalise, sur un même coussinet, des mesures de variation de quadrillages au dos avant et après chaque étape de son élaboration. Ces variations de longueur des « macro-mailles », mesurées entre l'état après conformation et l'état initial plan de la pièce, entre l'état après cambrage et l'état initial plan, et enfin entre l'état après conformation et l'état après cambrage, sont représentées respectivement sur les figures 3.32, 3.33, et 3.34 :

Figure 3.32 : Variations de la longueur de maille  
Cambrage / Flanc

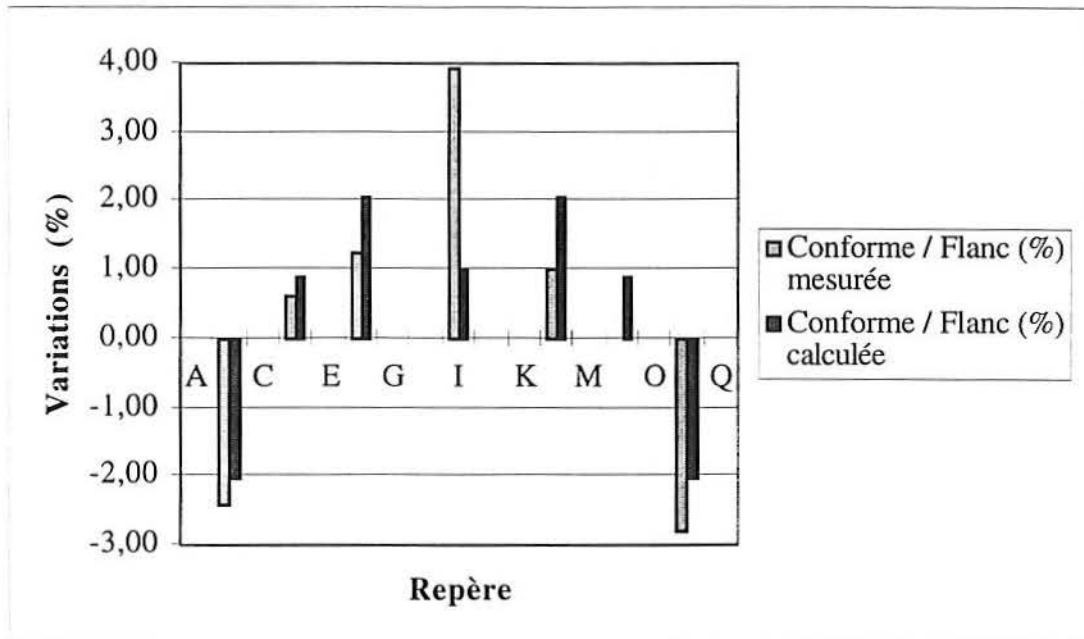


Figure 3.32 : Variations de la longueur de maille  
Conforme / Flanc

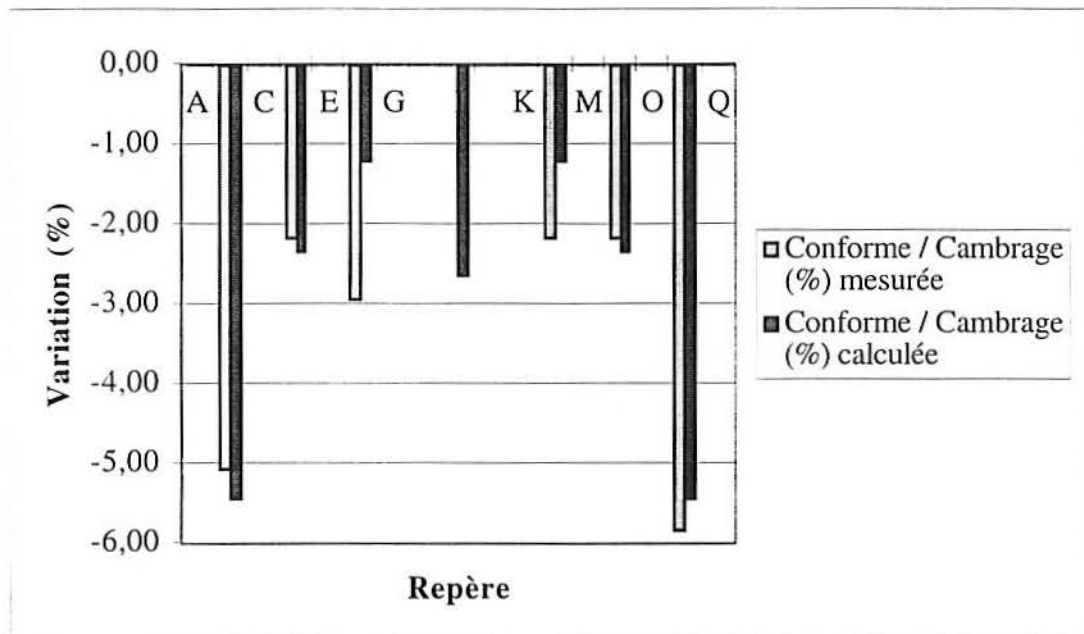


Figure 3.32 : Variations de la longueur de maille  
Conforme / Cambrage

Les résultats expérimentaux et numériques concordent bien, mises à part les variations conforme/flanc ou conforme/cambrage prises au centre du coussinet. Ces écarts peuvent venir de l'incertitude liée à la complexité des mesures expérimentales. De plus, ces mesu-

res n'ont pu être réalisées que sur une seule pièce, et la seule valeur obtenue au centre du coussinet ne peut être comparée à aucune autre car elle ne n'a pas de valeur symétrique.

L'ensemble de ces résultats confirment bien la pertinence des calculs réalisés, ainsi que les hypothèses retenues.

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre consacré à la mise en forme du coussinet nous force aux constatations suivantes :

### - Difficulté de la simulation

La modélisation par éléments finis d'un problème de mise en forme tel que celui du coussinet fait appel à une très grande prudence quant à l'utilisation d'un tel outil de calcul. Les calculs faisant appel aux grands déplacements, à l'élastoplasticité ou le contact avec frottement exigent des résolutions de systèmes d'équations non-linéaires très délicates et des temps de calculs conséquents. Une étude préalable des paramètres et des critères retenus doit permettre au calculateur de choisir convenablement les méthodes adéquates pour le traitement de ces non-linéarités, ainsi que l'algorithme de résolution du système. Il est donc nécessaire, chaque fois que cela est possible, de confronter les résultats obtenus à des observations tirées d'essais expérimentaux, mais aussi d'autres simulations plus ou moins simplifiées comme des approches analytiques développées à l'aide de modèles RDM.

### - Influence du contact

En plus de la caractérisation des matériaux étudiés, le contact, avec ou sans frottement, du coussinet avec l'outillage de fabrication tient une place prépondérante durant les deux étapes de mise en forme du coussinet que sont le cambrage et la conformation. Il est même l'élément qui détermine la distribution des contraintes dans l'épaisseur et la longueur du coussinet, ainsi que sa géométrie rendue plus ou moins parfaite par rapport au rayon de courbure et la longueur développée recherchés.

### **- Corrélation simulations / mesures expérimentales**

L'adéquation entre les valeurs numériques obtenues et les valeurs expérimentales soulignent l'intérêt de la modélisation, une fois que celle-ci a soigneusement été testée, pour le développement de nouveaux coussinets sans avoir recours à de multiples essais instrumentés. Elle peut alors être une aide à la fabrication et à la compréhension de ce qui passe dans un coussinet lors de son fonctionnement. A ce titre, nous pouvons signaler l'importance de l'étape de conformation et de la géométrie de l'outillage (poinçon), sur l'évolution du contact coussinet / berceau et par conséquent sur l'évolution de la courbure le long du coussinet de bielle. Nous disposons donc d'un outil qui nous permet de modifier le poinçon afin d'optimiser la courbure, en particulier pour de nouvelles pièces d'épaisseur différentes

### **- Exploitation des résultats**

L'exploitation des essais expérimentaux permet de bien cerner le comportement du coussinet dans ses deux phases de formation et par là d'être mieux à même de prévenir des avaries en fonctionnement. En outre le savoir-faire acquis pendant ce travail permet de simuler correctement l'incidence des modifications apportées au procédé de fabrication pour diminuer les risques de concentration de contrainte, de maîtriser les contraintes résiduelles après conformation finale, entre autres.

Enfin on peut signaler qu'à ce jour, aucune simulation numérique de mise en forme de coussinet au centre de recherche de TN, le groupe dont fait partie Glacier-Vandervell, n'a encore atteint ce degré de prédiction.



# Conclusion générale

Ce thème de recherche sur les coussinets de bielle portait sur de nombreux points. On a réalisé en premier lieu une analyse des caractéristiques mécaniques et thermomécaniques du matériau antifriction. Les résultats théoriques et expérimentaux obtenus ont permis l'identification des modèles d'homogénéisation les mieux adaptés pour la détermination des propriétés mécaniques à ce type de matériaux. On a acquis ainsi une meilleure connaissance des propriétés thermomécaniques de l'antifriction, en particulier des résultats extrapolables aux futurs matériaux antifriction en développement.

De nouvelles études seraient réalisables à partir de telles connaissances. Elles constitueraient par exemple une première étape à l'analyse et à la modélisation du comportement spécial, qualifié d'endommagement recherché, du matériau Al-Sn lors d'une surcharge accidentelle : la phase d'étain doit s'écouler plastiquement pour autoriser un affaissement localisé de la structure aluminium et permettre ainsi le rétablissement de la continuité du lubrifiant.

Lors d'une seconde phase, cette étude nous a permis l'évaluation de l'influence du frottement sur la mesure de longueur et sur le comportement du coussinet dans son logement. Le coefficient de frottement est déterminé in situ et les corrélations entre calculs et résultats expérimentaux valident cette approche originale du contact avec frottement. On a aussi pu montrer l'influence que pouvait avoir un rayon de courbure non constant le long du coussinet sur le frottement, et les conséquences que cela pouvait entraîner sur la répartition des déformations.

Il serait utile d'étendre le code laboratoire existant, lequel traite le cas du contact « plastique » de Tresca entre deux phases élastiques, pour automatiser le traitement itératif du frottement et traiter complètement le problème d'évolution en actualisant le maillage du coussinet et de son embase.

On pourrait aussi améliorer cette caractérisation du frottement en couplant les mesures par jauges de déformation dans l'alésage du coussinet et celles obtenues via les capteurs piézoélectriques à l'interface du coussinet et de son logement.

Une des applications directes de la simulation des effets de frottement est la possibilité d'étudier les microreptations d'un coussinet dans son logement, génératrices de microsoudures au dos du coussinet.

Enfin, le travail réalisé dans la dernière étape permet la détermination des paramètres influents de la mise en forme du coussinet. Lors de la fabrication, il est certain que des contraintes résiduelles subsistent dans l'épaisseur du coussinet de même qu'il apparaît des modifications de propriétés à l'intérieur du matériau. Ces aspects ont des conséquences directes sur le comportement de la pièce en situation réelle de fonctionnement. La compréhension de la fabrication repose encore sur de multiples essais expérimentés, d'où le recours à une modélisation aussi fine que possible qui offre des possibilités de gain de temps important sur l'optimisation dimensionnelle du coussinet. Aussi, à l'aide de ces nouvelles connaissances, il est possible de modifier l'outillage pour améliorer encore la géométrie du coussinet et surtout supprimer les surcontraintes induites par le procédé de fabrication.

# Bibliographie

- 1 VOIGT W., *Lehrbuch der Kristallphysik*, B.G. Teubner, Leipzig. (1910)
- 2 REUSS A., *Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle*, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 9, p 49 (1929)
- 3 HASHIN Z., SHTRIKMAN S., *A variational approach to theory of the elastic behaviour of multiphase materials*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 11, p 127 (1962)
- 4 HASHIN Z., *The elastic moduli of heterogeneous materials*, J. Appl. Mech., p 143 (1962)
- 5 HASHIN Z., SHTRIKMAN S., *A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials*, J. Appl. Physics, Vol. 33, p 1514 (1962)
- 6 ROSEN B.W., HASHIN Z., *Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials*, Int. J. Ing. Sci., Vol. 8, p 157 (1970)
- 7 HERSHEY A.V., *The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals*, J. Appl. Mech., Vol. 21, p 236 (1954)
- 8 KRÖNER E., *Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls*, Z. Phys., Vol. 151, p 504 (1958)
- 9 HILL R., *A self-consistent mechanics of composite materials*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, p 213 (1965)

- 10 BUDIANSKY B., *On the elastic moduli of some heterogeneous materials*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, p 223 (1965)
- 11 BUDIANSKY B., *Thermal and thermoelastic properties of isotropic composites*, J. Comp. Mater., Vol. 4, p 286 (1970)
- 12 HASHIN Z., *Assessment of the self consistent scheme approximation : Conductivity of particulate composites*, J. Comp. Mater., Vol. 4, No. 3, p 284 (1968)
- 13 MORI T., TANAKA K., *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, Acta Metallurgica, Vol. 21, p 571 (1973).
- 14 KERNER E.H., *The elastic and thermoelastic properties of composite media*, Proc. Phys. Soc., Vol. 69, p 808 (1956)
- 15 VAN DER POL C., *On the rheology of concentrated dispersions*, Rheol. Acta, Vol. 1, p 198 (1958)
- 16 CHRISTENSEN R.M., LO K.H., *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 27, p 315 (1979)
- 17 CHRISTENSEN R.M., *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley & sons Publ., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore. (1979)
- 18 MAURER F.H.J., *An interlayer model to describe the physical properties of particulate composites*, Control. Interph. in Comp. Mater., p 491 (1990)
- 19 HERVÉ E., ZAOUÏ A., *n-layered inclusion-based micromechanical modelling*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 31, No.1, p 1 (1993)
- 20 KERNER E.H., *The electrical conductivity of composite media*, Proc. Phys. Soc., Vol. B69, p 802 (1956)
- 21 PAPAIOGLOU E., SIMHA R., MAURER F.H.J., *Thermal expansivity of particulate composites : interlayer versus molecular model*, Rheol. Acta, Vol. 28, p 302 (1989)
- 22 DOWSON D., *History of Tribologie*, Longmans. (1979)

- 23 CAZAUD R., *Le frottement et l'usure des métaux. Les antifrictions*, Dunod. (1955)
- 24 LIGIER J. L., *Lubrification des paliers moteurs*, Technip. (1997)
- 25 SUQUET P., *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de l'Université de Pierre et Marie Curie, Paris. (1982)
- 26 SANCHEZ-PALENCIA E., ZAOUI A., *Homogeneization techniques for composite media*, Lecture notes in physics 272, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. (1985)
- 27 THOMAS de MONTPREVILLE C., *Modèle tridimensionnel pour le calcul des comportements mécaniques des alliages polyphasés*, Res. mechanica, Vol. 6, p 1 (1983)
- 28 BERVEILLER M., ZAOUI A., *Modelling of the plasticity and the texture development of two-phase metals*, Deformation of multiphase and particule containing materials, J. B. Bilde-Sørensen, N. Hansen, A. Horsewell, T. Leffers and H. Lilholt, 153, Risø National Laboratory, Roskilde (Denmark). (1983)
- 29 HILL R., *The essential structure of constructive laws for metal composites and polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, p 79 (1967)
- 30 MANDEL J., *Plasticité classique et viscoplasticité*, Cours au C.I.S.M. Udine., Springer (1971)
- 31 ESHELBY J.D., *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*, Pro. R. Soc. Lond., Vol. A 241, p 376 (1957)
- 32 LEVIN V.M., *On the coefficient of thermal expansion of heterogeneous materials*, Mekhanika Tvergolo Tela, Vol. 2, p 88 (1967)
- 33 TIMOSHENKO S.P., GOODIER J.N., *Theory on Elasticity*, McGraw-Hill Company, New York, St. Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico, Panama. (1970)

- 34 De LARRARD F., Le ROY R., *Un modèle géométrique d'homogénéisation pour les composites bi-phasiques à inclusion granulaire de large étendue* C. R. Acad. Sc. Paris, Vol. 314, Série II, p 1253 (1992)
- 35 SAFFRÉ P., BERGERET A., LIGIER J.L., PASTOR J., *A four-layered self-consistent scheme applied to two-phase composites*, Mech. Res. Com., Vol. 23, No. 4, p 359 (1996)
- 36 PASTOR J., NGUYEN VIET H., *Une résolution du problème auto-cohérent unidirectionnel à  $n+1$  phases*, in Actes du 12ème Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, Vol. 2, p 129 (1995)
- 37 MANDEL J.; *Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 241, p 1910 (1955)
- 38 NGUYEN VIET H., *Prévision du comportement mécanique des matériaux composites viscoélastiques avec interphase: approches théoriques et expérimentales*, Thèse de l'Université de Grenoble I (1994)
- 39 CROWSON R.J., ARRIDGE R.G.C., *Linear viscoelastic properties of epoxy resin polymers in dilatation and shear in the glass transition region. I. Time temperature superposition of creep data*, Polym., Vol. 20, p737 (1979)
- 40 AGBOSSOU A., BERGERET A., BENZARTI K., ALBEROLA N.; *Modelling of the viscoelastic behaviour of amorphous thermoplastic/glass beads composites based on the evaluation of the complex Poisson's ratio of the polymer matrix*, J. Mat. Sci., Vol. 28, p 1963 (1993)
- 41 LAGACHE M., AGBOSSOU A., PASTOR J., *Role of interphase on the elastic behaviour of composite materials : theoretical and experimental analysis*, J. Comp. Mat., Vol. 28, No 12, p 1140 (1994)
- 42 GUTOWSKI T.G., CAI Z., BAUER S., BOUCHER D., KINGERY J., WINEMAN S., *Consolidation experiments for laminate composites*, J. Comp. Mat., Vol. 21, p 650 (1987)
- 43 *Revue de l'aluminium*, p 117 (février 1974)

- 44 MATZELLE A.J., *Examination of stresses in Sleeve Bearing Backs*, Society of Automotive Engineers (1982)
- 45 CURNIER A., ALART P., *A generalized Newton Method for contact problems with frictions*, J. Méc. théor. appli., Special issue, supplément n° 1 to vol. 7, p 67 (1988)
- 46 RAOUS M., CHABRAND P., LEBON F, *Numerical methods for frictionnal contact problems and applications*, J. Méc. théor. appli., Special issue, supplément n° 1 to vol. 7, p 111 (1988)
- 47 JOHNSON A.R., QUIGLEY C.J., *Frictionless geometrically non-linear contact using quadratic programming*, Inter. J. Num. Meth. Eng., Vol. 28, p 127 (1989)
- 48 KLARBRING A., BJÖRKMAN G, *The treatment of problems in contact mechanics by mathematical programming* J. Méc. théor. appli., Special issue, supplément n° 1 to vol. 7, p 83 (1988)
- 49 KLARBRING A., *Mathematical programming in contact problems*, *Computational methods in contact problems*, Aliabadi M. H., Brebbia C. A., Eds., Elsevier, London. (1993)
- 50 ZHU C., *A finite element-mathematical programming method for elastoplastic contact problems with friction*, Finite element in analysis and design, Vol. 20, p 273 (1995)
- 51 RAOUS M., CESCOTTO S., CURNIER A., MILLARD A., *Modélisation mécanique et numérique du contact et du frottement*, Paris octobre 1996, IPSI (1996)
- 52 AMONTONS G., *Sur l'origine de la résistance dans les machines*, Mémoires de l'Académie Royale, p 206 (1699)
- 53 COULOMB C.A., *Théorie de machines simples*, Mémoire de Mathématique et de Physique de l'Académie Royale, Vol. 10, p 161 (1785)
- 54 DISDIER C., LOUTE E., PASTOR J., *Modeling the inelastic interphase in unidirectional composites*, Mechanics Research Communications, Vol. 22, 6, p 561 (1995)

- 55 DISDIER C., *Contribution à l'étude du décollement interfacial et des propriétés thermiques de composites unidirectionnels ; applications*, Thèse de l'Université de Savoie (1997)
- 56 BREZIS H., *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Massons, Paris (1983)
- 57 DUVAUT G., *Mécanique des Milieux Continus*, Masson, Paris (1990)
- 58 CAPURSO M., *Limit analysis of continuous media with piecewise linear yield conditions*, *Meccanica*, Vol. 6, p 53 (1971)
- 59 SIMMONARD, *Programmation linéaire-technique de calcul économique*, Collection Finance et Economie Appliquée, Dunod, Paris (1966)
- 60 MURTAGH B.A., *MINOS 5.1 User's Guide*, Report SOL 83-20R, Department of Operations Research, Standford University, California (1987)
- 61 DANTZIG J.B., *Applications et prolongement de la programmation linéaire*, traduit et adapté par Ventura E., Paris (1962)
- 62 ROBINSON S.M, *A quadratically convergent algorithm for general nonlinear programming problems*, *Mathematical programming*, Vol. 3, p 145 (1972).
- 63 ROSEN J.B., KREUSER J. : *A gradient projection algorithm for nonlinear constraints*, *Numerical methods for nonlinear optimization*, Academic Press, London and New-York, Ed. F. A. Lootsma (1972).
- 64 OTHMAN M.O., ELKHOLY A.H., *Measurement of friction coefficient under reciprocating, sliding, conditions*, *Eur. J. Mech., A/Solids*, Vol. 13, No 2, p 215 (1994)
- 65 GREEN A.E., NAGHDI P.M., *A general theory of an elastic-plastic continuum*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 18, p 251 (1965)



# Annexe A

## Constantes des modèles d'homogénéisation

Nous nous attacherons à définir certaines valeurs évoquées dans le premier chapitre mais qui n'ont pas été développées.

### A.1 Modèle autocohérent à trois phases

On rappelle que le module de cisaillement est solution de l'équation suivante :

$$A\left(\frac{\mu}{\mu_m}\right)^2 + 2B\left(\frac{\mu}{\mu_m}\right) + D = 0$$

Les coefficients de cette équation sont donnés par les expressions suivantes :

$$A = 8\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)(4 - 5\nu_m)\eta_1 c^{10/3} - 2\left(63\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)\eta_2 + 2\eta_1\eta_3\right)c^{7/3} \\ + 252\left(\frac{\mu_i}{\mu} - 1\right)\eta_2 c^{5/3} - 50\left(\frac{\mu_i}{\mu} - 1\right)(7 - 12\nu_m + 8\nu_m^2)\eta_2 c + 4(7 - 10\nu_m)\eta_2\eta_3$$

$$B = -2\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)(1 - 5v_m)\eta_1 c^{10/3} - 2\left(63\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)\eta_2 + 2\eta_1\eta_3\right)c^{7/3} \\ - 252\left(\frac{\mu_i}{\mu} - 1\right)\eta_2 c^{5/3} + 75\left(\frac{\mu_i}{\mu} - 1\right)(3 - v_m)v_m\eta_2 c + \frac{3}{2}(15v_m - 7)\eta_2\eta_3$$

$$D = 4\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)(5v_m - 7)\eta_1 c^{10/3} - 2\left(63\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)\eta_2 + 2\eta_1\eta_3\right)c^{7/3} \\ + 252\left(\frac{\mu_i}{\mu} - 1\right)\eta_2 c^{5/3} + 25\left(\frac{\mu_i}{\mu} - 1\right)(v_m^2 - 7)\eta_2 c - (7 + 5v_m)\eta_2\eta_3$$

avec

$$\eta_1 = \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)(49 - 50v_m v_i) + 35\frac{\mu_i}{\mu_m}(v_i - 2v_m) + 35(2v_i - v_m)$$

$$\eta_2 = 5v_i\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 8\right) + 7\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} + 4\right)$$

$$\eta_3 = \frac{\mu_i}{\mu_m}(8 - 10v_m) + (7 - 5v_m)$$

## A.2 Modèle autocohérent à $n + 1$ phases de Hervé-Zaoui

Le module de compressibilité, dans ce modèle, a pour expression :

$$K = \frac{3K_n R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} - 4\mu_n Q_{21}^{(n-1)}}{3(R_n^3 Q_{11}^{(n-1)} + Q_{21}^{(n-1)})}$$

où  $Q^{(k)}$  est une matrice s'écrivant :  $Q^{(k)} = \prod_{j=1}^k N^{(j)}$ , et  $N^{(j)}$  :

$$N^{(j)} = \frac{1}{3K_{j+1} + 4\mu_{j+1}} \begin{bmatrix} 3K_j + 4\mu_{j+1} & \frac{4}{R_j^3}(\mu_{j+1} - \mu_j) \\ 3(K_{j+1} - K_j)R_j^3 & 3K_{j+1} + 4\mu_j \end{bmatrix}$$

Le module de cisaillement est lui solution de l'équation :

$$A \left( \frac{\mu}{\mu_m} \right)^2 + 2B \left( \frac{\mu}{\mu_m} \right) + D = 0$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont ainsi définis :

$$A = 4R_n^{10}(1-2v_n)(7-10v_n)Z_{12} + 20R_n^7(7-12v_n+8v_n^2)Z_{42} \\ + 12R_n^5(1-2v_n)(Z_{14} - 7Z_{23}) + 20R_n^3(1-2v_n)^2 Z_{13} + 16(1-2v_n)(4-5v_n)Z_{43}$$

$$B = 3R_n^{10}(1-2v_n)(15v_n-7)Z_{12} + 60R_n^7(v_n-3)v_n Z_{42} \\ - 24R_n^5(1-2v_n)(Z_{14} - 7Z_{23}) - 40R_n^3(1-2v_n)^2 Z_{13} - 8(1-2v_n)(1-5v_n)Z_{43}$$

$$C = -R_n^{10}(1-2v_n)(7+5v_n)Z_{12} + 10R_n^7(7v_n^2)Z_{42} \\ + 12R_n^5(1-2v_n)(Z_{14} - 7Z_{23}) + 20R_n^3(1-2v_n)^2 Z_{13} - 8(1-2v_n)(7-5v_n)Z_{43}$$

où  $Z_{\alpha\beta} = P_{\alpha 1}^{(n-1)} P_{\beta 2}^{(n-1)} - P_{\beta 1}^{(n-1)} P_{\alpha 2}^{(n-1)}$ , avec  $\alpha \in [1, 4]$  et  $\beta \in [1, 4]$

et  $P$  est une matrice s'écrivant :  $P^{(k)} = \prod_{j=1}^k (L_{j+1}^{-1}(R_j) L_j(R_j))$ , et  $L_j(R_j)$  :

$$L_j(R_j) = \begin{bmatrix} R_j & -\frac{6v_j}{1-2v_j} R_j^3 & \frac{3}{R_j^4} & \frac{5-4v_j}{1-2v_j} \frac{1}{R_j^2} \\ R_j & -\frac{7-4v_j}{1-2v_j} R_j^3 & -\frac{2}{R_j^4} & \frac{2}{R_j^2} \\ \mu_j & \frac{3v_j}{1-2v_j} \mu_j R_j^2 & -\frac{12}{R_j^5} \mu_j & \frac{2(v_j-5)}{1-2v_j} \frac{\mu_j}{R_j^3} \\ \mu_j & -\frac{7+2v_j}{1-2v_j} \mu_j R_j^2 & \frac{8}{R_j^5} \mu_j & \frac{2(1+v_j)}{1-2v_j} \frac{\mu_j}{R_j^3} \end{bmatrix}$$



# Annexe B

## Formulation en Lagrangien actualisé en grandes déformations

### B.1 Cinématique du milieu continu

#### **B.1.1 Evolution de la configuration**

Sous l'effet des déplacements de la structure, la configuration de la structure évolue au cours du temps (Fig. B.1)

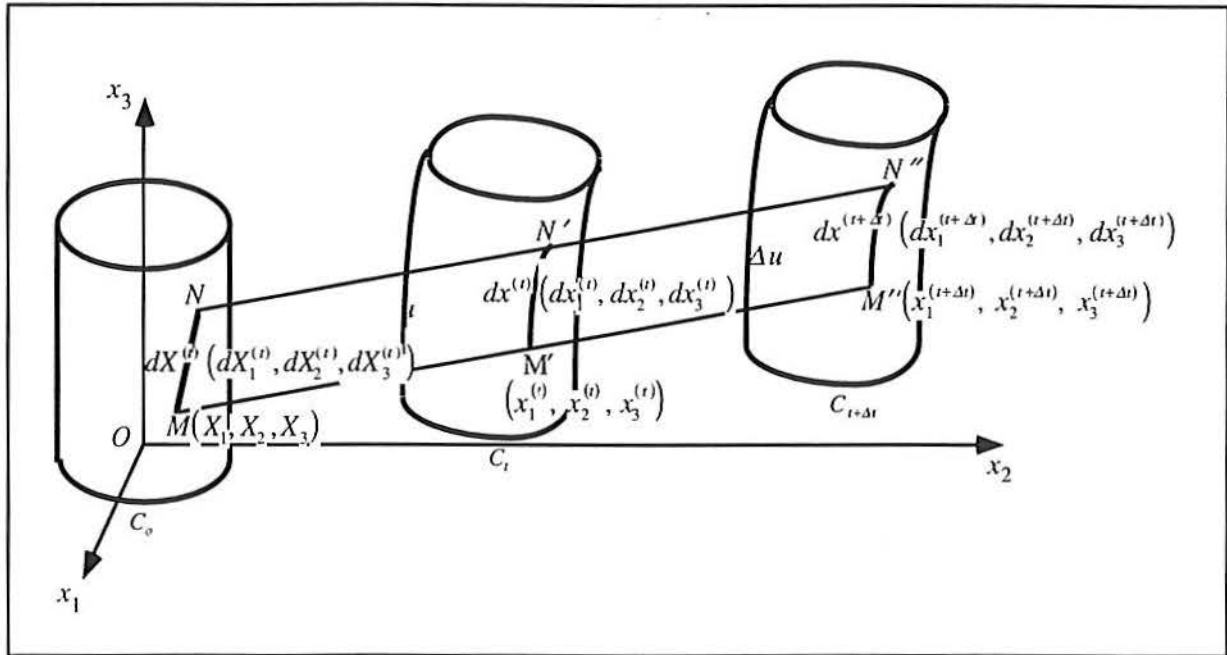


Figure B.1 : Evolution de la configuration ( $C_0$  à  $t = 0$ ,  $C_t$ ,  $C_{t+\Delta t}$ )

avec : -  $C_0$  la configuration non déformée de la structure (temps 0).

-  $C_t$ ,  $C_{t+\Delta t}$  la configuration déformée au instants adjacents  $t$  et  $t + \Delta t$ .

Un point  $M$  de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  dans  $C_0$  se transforme en  $M'$   $(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)})$  dans  $C_t$  et en  $M''$   $(x_1^{(t+\Delta t)}, x_2^{(t+\Delta t)}, x_3^{(t+\Delta t)})$  dans  $C_{t+\Delta t}$  :

$$OM = X \quad OM' = x^{(t)} \quad OM'' = x^{(t+\Delta t)} \quad (\text{B.1})$$

### B.1.2 Déplacements

Le déplacement du point  $M$  à l'instant  $t$  est défini par :  $u^{(t)} = x^{(t)} - X$

L'incrément de déplacement entre  $t$  et  $t + \Delta t$  est donné par :

$$\Delta u^{(t)} = u^{(t+\Delta t)} - u^{(t)} = x^{(t+\Delta t)} - x^{(t)} \quad (\text{B.2})$$

### B.1.3 Tenseurs gradient de la transformation

Considérons un point  $N$  voisin d'un point  $M$  dans la configuration initiale  $C_0$ . Le vecteur  $MN = dX$  se transforme en  $M'N' = dx^{(t)}$  dans la configuration  $C_t$  et en  $M''N'' = dx^{(t+\Delta t)}$  dans  $C_{t+\Delta t}$  :

$$dX \begin{vmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{vmatrix} \rightarrow dx^{(t)} \begin{vmatrix} dx_1^{(t)} \\ dx_2^{(t)} \\ dx_3^{(t)} \end{vmatrix} \rightarrow dx^{(t+\Delta t)} \begin{vmatrix} dx_1^{(t+\Delta t)} \\ dx_2^{(t+\Delta t)} \\ dx_3^{(t+\Delta t)} \end{vmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Les tenseurs gradients de la transformation permettent de relier ces vecteurs :

- on définit le tenseur gradient de la transformation de  $C_0$  à  $C_t$ ,  $F^t$ , tel que :

$$dx^t = F^t dX \quad (\text{B.4})$$

$$F^t = (f_{ij}^t) \quad ; \quad f_{ij}^t = \frac{\partial x_i^t}{\partial X_j} \quad (\text{B.5})$$

- on définit le tenseur gradient de la transformation de  $C_t$  à  $C_{t+\Delta t}$ ,  $F$  :

$$dx^{t+\Delta t} = F dx^t \quad (\text{B.6})$$

$$F = (f_{ij}) \quad ; \quad f_{ij} = \frac{\partial x_i^{t+\Delta t}}{\partial x_j^t} \quad (\text{B.7})$$

### B.1.4 Vitesses

Définition du vecteur vitesse en variables de Lagrange :

$$\dot{u}^{(t)} = \frac{dx_i}{dt}(X_i, t) \quad (\text{B.8})$$

### B.1.5 Tenseurs gradient de vitesse

Calculons la vitesse de transformation du vecteur  $(MN)$  :

$$\frac{d}{dt}((M'N') - (MN)) = \frac{d}{dt}(dx' - dX) = \frac{d}{dt}(dx), \text{ noté } d\dot{x} \quad (\text{B.9})$$

Exprimons les composantes du vecteur  $d\dot{x}$  :

$$\frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) dX_j \quad (\text{B.10})$$

puisque les variables  $X_1, X_2, X_3$  et  $t$  sont indépendantes, par conséquent :

$$\frac{d}{dt}(dx_i) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} dX_j \quad (\text{B.11})$$

par définition de la vitesse.

Nous définissons le tenseur gradient de vitesse en variables de Lagrange  $\dot{F}^t$  par :

$$d\dot{x}^t = \dot{F}^t dX \quad (\text{B.12})$$

d'après (B.12) les composantes de  $\dot{F}^t$  sont :  $f_i^t = \frac{\partial \dot{x}_i^t}{\partial X_j}$

Nous définissons aussi le tenseur gradient de vitesses en variables d'Euler  $L^t$  :

$$d\dot{x}^t = L^t dx^t \quad (\text{B.13})$$

$$L^t = \dot{F}^t \cdot F^{t-1}, \text{ d'après (5.1) et (5.3)} \quad (\text{B.14})$$

$$L^t = (L_{ij}^t) \quad ; \quad L_{ij}^t = \frac{\partial \dot{x}_i^t}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_j^t} = \frac{\partial \dot{x}_i^t}{\partial x_j^t} \quad (\text{B.15})$$

Les tenseurs gradients de vitesse  $\dot{F}^t, L^t$  permettent de définir la vitesse de transformation du vecteur  $(MN)$  à l'instant  $t$  en utilisant la configuration initiale  $C_0$  et la configuration actuelle  $C_t$  respectivement.



## B.2 Définition du tenseur vitesse de déformation

Considérons à nouveau le vecteur  $(MN) = dX$  dans  $C_0$  qui se transforme en  $(M'N') = dx'$  dans la configuration  $C_t$ . Calculons le taux de variation de sa longueur  $dl$  :

$$dl^2 = {}^T dx' dx' \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{d}{dt}(dl^2) = \frac{d}{dt}({}^T dx' dx') = {}^T dx' dx' + {}^T dx' d\dot{x}' \quad (\text{B.17})$$

En utilisant (B.13), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(dl^2) = {}^T dx' ({}^T L + L) dx' \quad (\text{B.18})$$

soit :

$$\frac{d}{dt}(dl^2) = 2 {}^T dx' \dot{\epsilon}' dx' \quad (\text{B.19})$$

en définissant le tenseur vitesse de déformation à l'instant  $t$

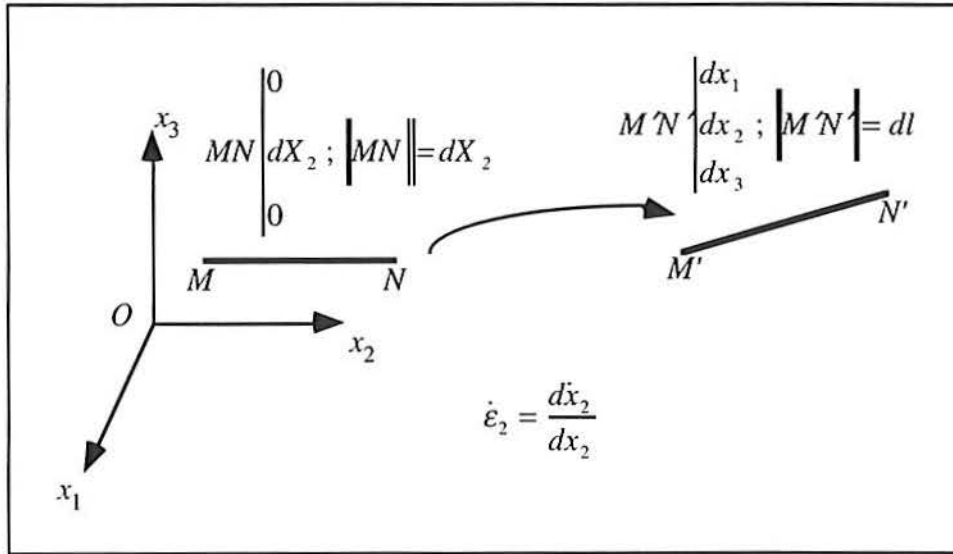
$$\dot{\epsilon}' = \frac{1}{2}({}^T L' + L') \quad (\text{B.20})$$

comme la partie symétrique du gradient de vitesse  $[L']$

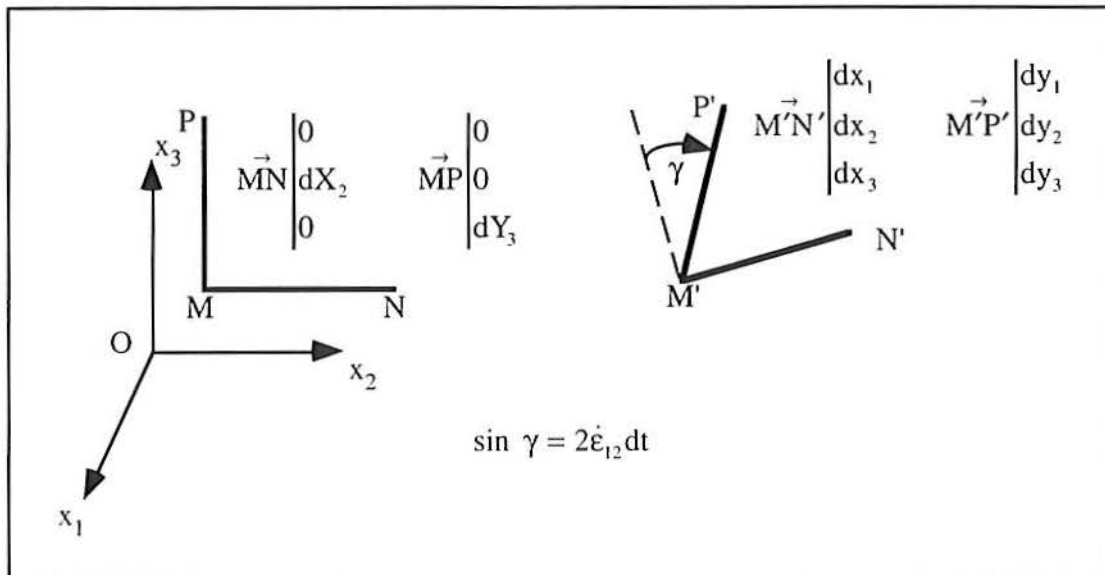
$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \quad (\text{B.21})$$

Le tenseur  $\dot{\epsilon}$  permet de caractériser la vitesse de déformation de la structure en déterminant :

- les taux de variation de longueur dans une direction quelconque (équation (B.19)) ou dans une direction particulière (Fig. B.2).

Figure B.2 : Vitesse de variation de longueur suivant  $Ox_2$ 

- les taux de variation d'angle au voisinage d'un point.

Fig B.3 : Vitesse de variation d'angle dans le plan  $Ox_2x_3$ 

### B.3 Remarques diverses

- 1) Le tenseur gradient de vitesse se décompose en deux tenseurs :

- le tenseur vitesse de déformation qui constitue sa partie symétrique

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}(L + {}^T L)$$

- le tenseur vitesse de rotation qui constitue sa part antisymétrique

$$\Omega = \frac{1}{2}(L - {}^T L)$$

$\dot{\varepsilon}$  mesure la déformation du milieu,  $\Omega$  mesure la rotation d'ensemble au voisinage d'un point.

Ainsi dans le mouvement de corps rigide (translation + rotation)

- le tenseur  $\dot{\varepsilon}$  s'annule
- le tenseur vitesse de rotation  $\Omega$  est en général différent de 0.

2) Le tenseur des déformations est défini par :

$$\varepsilon^t = (\varepsilon'_{ij}) \quad ; \quad \varepsilon'_{ij} = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}^{\tau} d\tau$$

Au cours d'un incrément de temps  $\delta t$  est donnée par :

$$\delta \varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} \delta t$$

soit en utilisant (B.21)

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x'_i} \right)$$

3) Loi de comportement :

La loi de comportement utilisée dans SYSTUS+ relie les taux de variation par rapport au temps des déformations et des contraintes. Ce type de loi est bien adapté pour représenté le type de cas très général des grandes déformations en présence de matériaux non linéaires.

Le taux de variation des contraintes et des déformations devant constituer des dérivées objectives par rapport au temps du tenseur des contraintes et des tenseurs des déformations on utilise :

- pour le tenseur taux de déformation : le tenseur vitesse de déformation

- pour le tenseur taux de contrainte : la dérivée convective du tenseur des contraintes de Cauchy dont l'expression est donné par :

$$\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} - L' \sigma' {}^T L'$$

où  $\sigma$  désigne la dérivée particulière du tenseur des contraintes et  $\overset{\circ}{\sigma}$  désigne la dérivée convective de  $\sigma$ .

La relation de comportement est de type hypoélastique. La dérivé convective du tenseur des contraintes et le tenseur vitesse de déformation sont liés par la relation :

$$\overset{\circ}{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\dot{\varepsilon}) I + 2 \mu \dot{\varepsilon} \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont les coefficient de Lamé.}$$

#### 4) Principe des travaux virtuels dans la configuration actualisée

La puissance de déformation peut s'exprimer en fonction des tenseurs  $\sigma$  et  $\dot{\varepsilon}$  dans la configuration actualisée à l'instant  $t$  :

$$\dot{W} = \int_{V_t} \dot{\varepsilon} \sigma dV$$

Considérons un déplacement virtuel  $\delta u$  de la structure à partir de sa configuration à l'instant  $t$ . Il lui correspond une variation des déformations  $\delta \varepsilon$  donnée par (5.7) et une variation de l'énergie de déformation

$$\delta W = \int_{V_t} \delta \varepsilon \sigma dV$$

Le principe des travaux virtuels permet d'écrire que cette variation de l'énergie de déformation est égale au travail virtuel des forces extérieures :

$$\int_{V_t} \delta \varepsilon \sigma dV = \int_{V_t} \delta u f dV + \int_{S_t} \delta u p dS$$

où  $f$  et  $p$  désignent les forces de volume et les forces de surface qui agissent à l'instant  $t$  dans la configuration actualisée.

Les équations d'équilibre dans la configuration  $C_t$  découlent alors de l'équation précédente.

## Annexe C

### Courbes de traction des matériaux

On donnera ici l'allure des courbes de traction pour chacun des matériaux telles qu'elles ont été définies pour décrire leur comportement élastoplastique sous Systus+. Ces courbes sont issues d'essais expérimentaux réalisés sous les conditions décrites au chapitre 1.

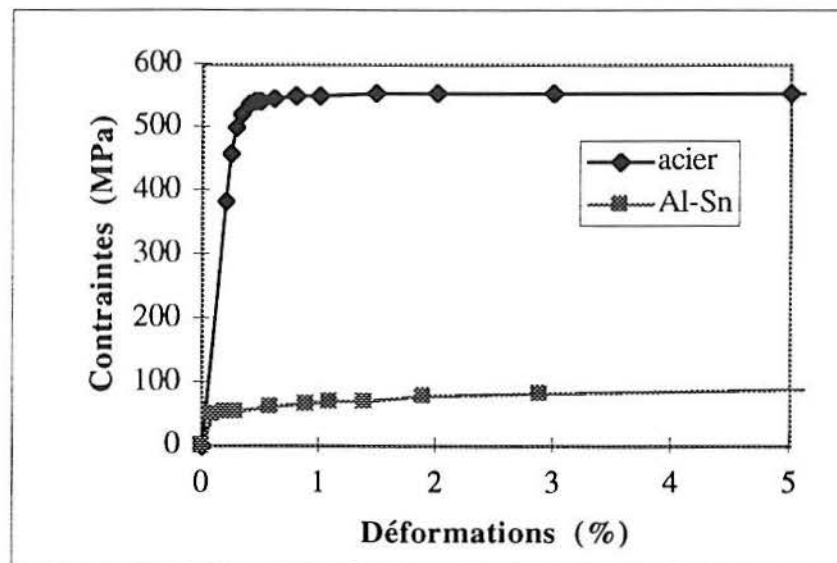


Figure C.1 : Courbes de traction de l'acier et de l'alliage antifriction



## RESUME :

Les coussinets de bielles sont présents dans tous les moteurs thermiques à combustion interne de véhicules automobiles. Outre la génération d'un couple sur le vilebrequin dû à l'effort qu'elle applique sur ce dernier, la bielle doit aussi garantir le bon fonctionnement de ses articulations avec le piston et avec le vilebrequin. Pour assurer cette dernière fonction, on utilise précisément des coussinets. Le type de coussinet ayant servi à cette étude possède un revêtement en alliage d'aluminium-étain plaqué sur un feuillard d'acier.

Les principales questions que se pose l'industriel concernent les points suivants :

- la connaissance des caractéristiques thermomécaniques du matériau antifriction du coussinet ;
- la connaissance des facteurs influents lors de l'opération de mise en forme du coussinet ;
- la validité des contrôles de mesure de longueur, en particulier l'importance de l'erreur induite par le frottement du coussinet dans son logement de contrôle.

Ainsi dans une première partie et compte tenu de l'aspect multiphase du matériau, nous avons étudié les différentes techniques d'homogénéisation relatives à ce type de matériau. Pour répondre le plus fidèlement à la question posée, nous avons aussi développé un modèle à quatre phases. Ces modèles ont été validés par confrontation avec des essais sur différentes familles d'éprouvettes et sur toute une gamme de températures.

Fort de cette connaissance des propriétés thermomécaniques, nous avons abordé, dans une seconde partie, l'étude du frottement du coussinet dans son logement et plus particulièrement l'effet de ce phénomène sur l'opération de contrôle de longueur développée du coussinet. Une corrélation calcul/mesure nous a permis d'identifier les valeurs des coefficients de friction à considérer.

Connaissant les caractéristiques des matériaux et le coefficient de frottement coussinet/logement en acier, nous avons pu, dans une dernière partie, étudier la mise en forme du coussinet lui-même. Une simulation numérique des différentes étapes de la mise en forme a été réalisée à l'aide du logiciel SYSTUS. Un modèle simplifié de type RDM a été employé pour confirmer les ordres de grandeur obtenus par le code. In fine, la comparaison calcul expérience s'avère tout à fait satisfaisante pour chacun des contrôles expérimentaux que nous avons réalisés.

---

## TITLE and ABSTRACT :

### CRANK BEARING OPTIMISATION : CHARACTERISATIONS, SIMULATIONS AND FORMING

Crank bearings are present in all car internal combustion engines. Apart from the generation of a torque on the crankshaft due to the strain applied on the latter, the crank has to ensure the smooth running of its articulations with the piston and the crankshaft. To guarantee this last function, we therefore use bearings. The kind of bearing used for this investigation has an aluminum-tin alloy plating on a steel foil.

The main questions which manufacturers have to solve include the following :

- knowledge of the bearing antifriction material's thermomechanical characteristics ;
- knowledge of the factors at work during the bearing forming process ;
- validity of length measurement controls, particularly the importance of the margin of error caused by the bearing's friction in its test seating.

Thus, initially and also taking into account the multiphase aspect of the material, we studied the different homogenization techniques associated with this kind of material. To answer this question as accurately as possible, we developed a four phase model. The validity of these models has been tested by experimental comparison with different types of specimens and across a range of temperatures.

Armed with this knowledge of thermomechanical properties, we then undertook the study of the bearing's friction in its seating and in particular the effect of this phenomenon on the developed length bearing control operation. A calculation/measurement correlation enabled us to identify what friction coefficient values needed to be consider.

Knowing the characteristics of the materials and the friction coefficient of the bearing/steel seating, we were finally able to study the forming of the bearing itself. A numerical simulation of the different stages in the forming process was developed with the help of the SYSTUS software program. A simplified model of RDM type was used in order to confirm orders of size obtained by the code. To conclude, the calculation/test comparison is proving very satisfactory in each of the experimental tests we carried out.

---

## DISCIPLINE : Mécanique et Matériaux

---

**MOTS-CLES :** Homogénéisation - Thermoélasticité - Frottement - Elastoplasticité - Grandes déformations - Mise en forme - Coussinet de bielle - Méthode des Eléments Finis

---

LaMaCo - E.S.I.G.E.C. - Université de Savoie - 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex - France